ECS 232

2. ความน่าจะเป็น (Probability)

2.1 บทนำ

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีความน่าจะเป็น นิสิตควรจะทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรื่อง เซ็ต (Set) ก่อน เพราะเซ็ตมีความเกี่ยวข้องกับสิ่งต่างๆที่อยู่รอบตัวเรา เกี่ยวข้องกับกลไกของวิชาคณิตศาสตร์และเกี่ยวข้องกับสถิติทุกแขนง โดยจะทำให้ความเข้าใจในเรื่องความน่าจะเป็นดีขึ้น รวมทั้งความเข้าใจในเรื่องสถิติวิเคราะห์เชิงอนุมานดีขึ้นด้วย

โดยในที่นี้จะให้นิสิตกลับไปทบทวนเรื่องเซ็ตเอง ได้แก่เรื่องเซ็ต การกำหนดเซ็ตใดๆ เซ็ตย่อย (subsets) Universal and Empty Set Venn-Diagram วิธีการทางเซ็ต (Operation with Sets) รวมถึงกฎพีชคณิตของเซ็ต ซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

พีชคณิตของเซ็ต (Algebra of Sets)

พิสูจน์ได้โดยใช้ Venn-Diagram

1. Idempotent Laws $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
2. Commutative Laws $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
3. Associative Laws $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. Distributive Laws $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. Absorptive Laws $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$

6. De Morgan's Laws $A \cup B = A \cap B$

$A \cap B = A \cup B$

7. Identity Laws $A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \Omega = A$

8. Complement Laws $A \cup A = \Omega$

$A \cap A = \emptyset$

2.2 การทดลองชนิดสุ่มและแซมเปิลสเปซ(Random Experiment and Sample Space)

- การทดลองแบบสุ่ม คือการทดลองที่ไม่สามารถพยากรณ์หรือทำนายผลการทดลองได้อย่างถูกต้องแน่นอน เนื่องจากผลการทดลองสามารถเกิดขึ้นได้หลายกรณี
- ในทางสถิติ การทดลองแบบสุ่ม หมายถึงการกระทำใดๆที่จะทำให้ได้ข้อมูลดิบมา(raw data) โดยผลที่ได้จากการทดลองขึ้นอยู่กับโอกาส(chance)เราจึงไม่สามารถทำนายผลของการทดลองได้ด้วยความแน่นอน
- ตัวอย่างการทดลองทางสถิติ เช่น
    - การโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ผลของการทดลองอาจเป็นได้ 2 กรณีคือ หัว และ ก้อย
    - การโยนลูกเต๋า 1 อัน 1 ครั้ง ผลของการทดลองอาจเป็นได้ 6 กรณีคือ1, 2 , 3, 4 , 5 และ 6
- เราเรียกเซ็ต ซึ่งสมาชิกในเซ็ตแทนผลของการทดลองชนิดสุ่มที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดว่า "แซมเปิลสเปซ" (Sample Space) เขียนแทนได้ด้วย S และเรียกสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ว่า "แซมเปิลพ้อย" (Sample Point)

Example 1 การโยนลูกเต๋า 1 ลูกนับได้ว่าเป็นการทดลองแบบสุ่ม เพราะไม่สามารถพยากรณ์ผลการทดลองได้อย่างถูกต้องแน่นอน ถ้าเราสนใจเพียงตัวเลขที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋า Sample Space : S_1

ดังนั้น $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

แต่ถ้าเราสนใจเพียงแต่ว่า ตัวเลขนั้นเป็นเลขคู่หรือคี่ และให้ S_2 เป็น Sample Space ของการทดลองสุ่มนี้ดังนั้น

ดังนั้น $S_2 = \{\text{เลขคู่}, \text{เลขคี่}\}$

Example 2 ทดลองโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง ในการโยนแต่ละครั้ง ถ้าเหรียญเที่ยงตรงผลอาจเกิดหัว (H) หรือก้อย (T) ดังนั้น Sample Space ที่แสดงผลของการทดลองครั้งนี้มากที่สุด คือ

$$S_1 = \{HH, HT, TH, TT\}$$

แต่ถ้าผลลัพธ์ที่เราสนใจก็คือ $S_2 = \{0, 1, 2\}$

0 หมายความว่า เหรียญ ไม่ขึ้น H เลย

1 หมายความว่า เหรียญขึ้น H 1 ครั้ง

2 หมายความว่า เหรียญขึ้น H 2 ครั้ง

2.3 เหตุการณ์ *(Events)*

- นิยามที่ 1 เหตุการณ์ คือ สับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ นิยมเขียนแทนด้วย A, B, E เป็นต้น จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดจะเท่ากับจำนวนสับเซ็ตทั้งหมดของแซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์เกิดถ้าผลที่เกิดเป็นสมาชิกของเหตุการณ์
  - เหตุการณ์ Ø (Empty set) หมายถึงเหตุการณ์ที่ไม่มีทางจะเกิดขึ้นเลย(Impossible events)
  - เหตุการณ์ S (Sure event) เป็นเหตุการณ์ที่ต้องเกิดขึ้นเสมอ
- นิยามที่ *2* เหตุการณ์ *A* และ *B* เป็นเหตุการณ์ที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด ถ้าเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้นในขณะเดียวกันไม่ได้ สามารถเขียนได้ดังนี้ *A* และ *B* เป็นเหตุการณ์ที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$
- นิยามที่ *3* เหตุการณ์ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด ถ้า $E_i \cap Ej = \emptyset$, โดยที่ $i \neq j$ และ i, j = 1,2,3,…n.

Example 3 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก *1* ครั้ง หากผลการทดลองที่เราสนใจ คือ เลขที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋า

Sample Space คือ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้เลขที่หาร *5* ลงตัว จะได้ $E_1 = \{5\}$ ซึ่งเป็นเซ็ตย่อยของ *S* และมี *Sample point* เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียว ดังนั้น E_1 เป็นเหตุการณ์เดี่ยว

ถ้า E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้เลขคู่ จะได้ $E_2 = \{2, 4, 6\}$ ซึ่งเป็นเซ็ตย่อยของ *S* และมี *Sample point* เป็นสมาชิก 3 ตัวดังนั้น E_2 เป็นเหตุการณ์ร่วม

2.4 ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่งๆ เป็นการบอกถึงค่าของตัวเลขวัดว่าเหตุการณ์นั้นๆจะมีโอกาสเกิดมากน้อยเพียงใด

- โดยปกติค่าความน่าจะเป็นจะมีค่าอยู่ระหว่าง *0* ถึง *1*
- ถ้าเท่ากับ *0* แสดงว่าเหตุการณ์นั้นไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย
- ถ้าเท่ากับ *1* แสดงว่าเหตุการณ์นั้นต้องเกิดขึ้นแน่ๆ
- ถ้าอยู่ระหว่าง *0* กับ *1* แสดงว่าเหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับว่าตัวเลขนั้นอยู่ใกล้ *0* หรือ *1*

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่เราสนใจในการทดลองสุ่มอย่างหนึ่ง *N* ครั้ง แล้วเหตุการณ์ *E* เกิดขึ้นทั้งหมด *n* ครั้ง อัตราส่วน $\frac{n}{\mathrm{N}}$ เรียกว่าความถี่สัมพัทธ์*(relative frequency)*ที่จะบอกให้รู้ว่าเหตุการณ์ *E* มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด จำนวนครั้งที่ทำการทดลองสุ่ม *(N)* ยิ่งมากเท่าใด ค่าของ $\frac{n}{\mathrm{N}}$ จะมีแนวโน้มเข้าใกล้ *1* เราเรียกค่าของเลขตัวนี้ว่า ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ *E* และสามารถเขียนได้ดังนี้

$$P(E) = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{N}}\right)$$

- นิยามที่ *4* ถ้าในการทดลองชนิดสุ่มอย่างหนึ่งเกิดผลได้ *N* วิธี โดยแต่ละวิธีของการทดลองมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน และจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ *E* มีอยู่ *n* วิธี *(*ใน *N* วิธีของการทดลอง*)*เรากล่าวว่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ *E = P(E)*

$$P(E) = \frac{\text{จำนวนวิธีที่ } E \text{ ได้เกิดขึ้น}}{\text{จำนวนวิธีทั้งหมดของการทดลอง}} = \frac{n}{N}$$

หรือ

$$P(E) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกในเซ็ต } E}{\text{จำนวนวมาชิกในเซ็ต} S}$$

ซึ่งจากอัตราส่วนดังกล่าวจะเห็นได้ว่า $P(E)$ จะต้องมีค่าไม่น้อยกว่า 0 และต้องไม่เกิน 1

Example 4 โยนลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

(a) ลูกเต๋าจะขึ้นแต้มเหมือนกัน

(b) ลูกหนึ่งขึ้นแต้ม *1* และอีกลูกหนึ่งขึ้นแต้ม *6*

วิธีคิด ในการทอดลูกเต๋าสองลูก *1* ครั้ง ลูกเต๋าลูกแรกปรากฏผลได้ *6* วิธี และลูกเต๋าที่สองปรากฏผลได้อีก *6* วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ในการทดลอง เท่ากับ *6x6 = 36* วิธี

S = {(1,1), (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),

(2,1),…… , (2,6),

(3,1),…….., (3,6),

(4,1),……, (4,6),

(5,1),……,(5,6),

(6,1),……,(6,6)}

ให้ *A* แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองขึ้นแต้มเหมือนกัน

B แทนเหตุการณ์ที่ขึ้นแต้ม *1* หนึ่งลูก และอีกลูกขึ้นแต้ม *6*

(a) A = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)(5,5),(6,6)}

ดังนั้น P(A) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(b) B = {(1,6),(6,1)}

ดังนั้น P(B) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Example 5 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง *3* ลูก สีขาว *2*ลูก และสีดำ *5* ลูก สุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมา *3* ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละ *1* ลูก

วิธีคิด การเลือกลูกบอล *3* ลูกจากบอลทั้งหมด *10* ลูก

สามารถทำได้ทั้งสิ้น $\binom{10}{3}$ วิธี

การเลือกที่ได้สีละ *1* ลูก สามารถเลือกได้ทั้งสิ้น $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{5}{1}$

ดังนั้น P *(จะได้ลูกบอลสีละ 1 ลูก)* = $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ วิธี

2.5 คุณสมบัติและทฤษฎีของความน่าจะเป็น

จากตัวอย่างความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ สามารถสรุปคุณสมบัติที่สำคัญของความน่าจะเป็นได้ดังนี้

คุณสมบัติที่1: ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่ง ๆจะมีค่าเป็นบวกเสมอ นั่นคือ $P(A) \geq 0$ สำหรับสับเซ็ต A ใดๆของ Sample space S

คุณสมบัติที่2: $P(S) = 1$

คุณสมบัติที่3: ถ้า $A_1, A_2, A_3, \ldots$, เป็นลำดับของเหตุการณ์ใดๆที่อยู่ใน Sample space S แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots$$

นอกจากคุณสมบัติที่สำคัญของทฤษฎีของความน่าจะเป็นสามข้อข้างต้นแล้ว ยังมีทฤษฎีต่างๆที่จะมาใช้ในเรื่องนี้อีกด้วยได้แก่

Theorem 2.3 If A is an event in a discrete sample space S, then P(A) equals to the sum of the probabilities of the individual outcomes comprising A.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Proof ….

Example 6 หากทำการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง หาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลที่ออกเป็นหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

วิธีคิด*…..*

Theorem 2.3 If A and A' are complementary events in a sample space S, then

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Proof ….

Theorem 2.4 $P(\emptyset) = 0$ for any sample space S

Proof ….

Theorem 2.5 If A and B are events in a sample space S and $A \subset B$, then $P(A) \leq P(B)$

Proof…

Theorem 2.6 for $0 \leq P(A) \leq 1$ for any event A.

Proof…

Theorem 2.7 If A and B are any two events in a sample space S, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Proof…

Theorem 2.8 If A, B and C are any three events in a sample space S, then

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Proof…

Example 6 ทอดลูกเต๋า 2 ลูก หนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. ผลบวกของแต้มทั้งสองของลูกเต๋าเป็น 7
2. ผลบวกของแต้มทั้งสองหารด้วย 3 ลงตัว

2.6 ความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

นิยาม ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ B เกิด สามารถเขียนได้ดังนี้ P (A|B) สามารถกำหนดได้ด้วยสมการ

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} \quad , \; P(B) \neq 0$$

เมื่อ $(A \cap B)$ คือการเกิดเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B

เอา $P(B)$คูณสมการข้างบน จะสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ว่า

- กฎของการคูณ (General Multiplication Rule)

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

Example 7 หยิบไพ่สองครั้งๆละ *1* ใบ จากไพ่ทั้งสำรับที่มี *52* ใบ โดยไม่คืนไพ่ใบแรกกลับเข้าไปในสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่โพดำทั้งสองครั้ง

วิธีคิด ...ให้ *A* แทนเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งแรกได้โพดำ B แทนแทนเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ครั้งที่สองได้โพดำหลังจากหยิบครั้งแรกแล้ว

$(A \cap B)$ แทนเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ได้โพดำทั้งสองครั้ง

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

$$= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \quad = \frac{1}{17}$$

2.7 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent Events)

สำหรับเหตุการณ์ใดๆสองเหตุการณ์ หากเหตุการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้นไม่มีผลทำให้โอกาสที่เกิดเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนแปลงไป เราจะเรียกเหตุการณ์ทั้งสองว่าเป็นเหตุการณ์เป็นอิสระต่อกัน (Independent events) อย่างไรก็ตามให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

โยนเหรียญ *1* อันสองครั้งจะได้ *Sample space* เป็น

$$S = \{HT, HH, TH, TT\}$$

ความน่าจะเป็นที่สมาชิกแต่ละตัวของ *S* จะเกิดขึ้นเป็น $\frac{1}{4}$ สมมติให้

C = {H}

*B = {*ครั้งแรกขึ้น *H} = {HH, HT}*

*A = {*ครั้งที่สองขึ้น *T} = {HT, TT}*

จะได้ *P(B)* = $\frac{1}{2}$, ได้ *P(A)* = $\frac{1}{2}$, ได้ *P(C)* = $\frac{1}{4}$

P(B|C) = $\frac{P(B \cap C)}{P(C)}$ = $\frac{P(C)}{P(C)}$ = *1*

ดังนั้น *P(B)* ≠ *P(B|C)*

P(A|B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = $\frac{P(\{HT\})}{P(B)}$

= $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ = P(A)

จะเห็นว่าไม่ว่าจะกำหนดว่า *B* จะต้องเกิดขึ้นก่อนแล้ว *A* เกิด หรือไม่
กำหนดให้ *B* เกิดก่อน จะได้ว่า *P(A|B) = P(A)*
เราจะกล่าวว่า *A* และ *B* เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน หรือ ถ้าเราได้ว่า
P(B|A) = P(B) *A* และ *B* เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

จาก *P(A|B)* = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, P(B) ≠0
เนื่องจาก *P(B)* ≠ 0 *ดังนั้นใช้ P(B) คูณตลอดจะได้*

P(A|B) P(B) = P$(A \cap B)$
P$(A \cap B)$ = *P(A)* X *P(B)* *ถ้า P(A|B)* = P(A)

***2.8* ทฤษฎีเบย์ (Bayes Theorem)**

ทำแบบฝึกหัดบทที่*3* ทำทุกข้อ ให้เลือกส่งเพียง *3* ข้อ