2. Matrix Algebra

2.1 บทบาทของเมตริกซ์

พีชคณิตเชิงเส้นเป็นการแสดงสมการที่ซับซ้อนให้อยู่ในรูปที่ง่าย และเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่ชัดเจนและสามารถหาคำตอบในสมการได้

Example 1

สำหรับบริษัทที่มีการขายสินค้าหลายยี่ห้อ สามารถเขียนเมตริกซ์ได้ในลักษณะดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{cc} \text{Outlet} & \begin{array}{ccc}\text{Skies} & \text{Poles} & \text{Bindings}\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 90 & 90 & 45 \\ 110 & 80 & 60 \\ 120 & 110 & 70 \end{bmatrix} \end{array}$$

เมื่ออ่านข้ามระหว่างแถว(row) บริษัทสามารถกำหนดระดับของปริมาณสินค้าจากการผลิตในโรงงานแต่ละประเภทได้ เมื่ออ่านตามสดมภ์หรือแนวดิ่ง(column) บริษัทสามารถกำหนดระดับของปริมาณการผลิตในแต่ละโรงงานที่จะผลิตสินค้าในแต่ละประเภทได้

2.2 เมตริกซ์

เมตริกซ์คือการจัดวางเรียงของตัวเลข โดยตัวเลขที่อยู่ในแนวนอนเรียกว่า แถว(row) ส่วนตัวเลขที่อยู่ตามแนวดิ่งเรียกว่า (column) โดยที่จำนวนแถวและคอลัมน์จะเป็นตัวบอกขนาดหรือมิติ (dimension)ของเมตริกซ์ เช่นอ่านว่า เมตริกซ์มีขนาด rxc

นอกจากนี้ Square matrix คือ เมตริกซ์ที่มีขนาดของแถวและคอลัมน์เท่ากัน เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยคอลัมน์เดียวมีมิติเท่ากับ rx1 เรียกว่า column vector ส่วนเมตริกซ์ที่ประกอบด้วยแถวเดียวมีมิติเท่ากับ 1xc เรียกว่า row vector ส่วน เมตริกซ์ที่มีการสลับตำแหน่งจากแถวเป็นคอลัมน์ และคอลัมน์เป็นแถว เรียกว่า ทรานสโพสของ A หรือ A^T (A')

Example 2

จากเมตริกซ์ต่อไปนี้ ให้หาขนาดของเมตริกซ์และ หาทรานสโพส ของเมตริกซ์

กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B = $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ D = $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

2.3 การบวกและลบเมตริกซ์

การบวกและลบเมตริกซ์กระทำได้เมื่อมิติของเมตริกซ์เท่ากัน และทำได้โดยสมาชิกในแต่ละตำแหน่งมาบวกหรือลบกัน

Example 3

ให้หาผลบวกของเมตริกซ์ A + B และผลลบของเมตริกซ์ C-D

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

2.4 การคูณด้วยสเกลาร์

การคูณเมตริกซ์ด้วยตัวเลข(สเกลาร์) ทำได้โดยคูณตัวเลขเข้าไปในแต่ละตำแหน่งของเมตริกซ์ โดยที่มิติของเมตริกซ์ไม่เปลี่ยนแปลง

Example 4

ให้หาผลคูณของสเกลาร์ kA กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

2.5 การคูณเวคเตอร์

การคูณ row vector A กับ column vector B มีค่าเท่ากับ

$$\mathbf{AB} = (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) + (a_{13} \times b_{31})..etc$$

Example 5

ให้หาผลคูณของ AB จากการคูณ row vector A กับ column vector B
โดยที่

$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.6 การคูณเมตริกซ์

ในการคูณเมตริกซ์ A มิติ r1xc1 กับเมตริกซ์ B มิติ r2xc2 จะสามารถคูณได้เมื่อ c1=r2

Example 6

สมมติให้

A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

AB = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 18+30+91 & 36+60+14 \\ 72+45+143 & 144+90+22 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 139 & 110 \\ 260 & 256 \end{bmatrix}$

2.7 กฎการถ่ายทอด การจัดกลุ่มและการกระจายของเมตริกซ์

- กฎว่าด้วยการถ่ายทอด การจัดกลุ่มและการกระจาย

  A + B = B + A

  A – B = -B + A

  (A + B) + C = A + (B + C)

  (XY)Z = X(YZ)

  A (B + C) = AB + AC

  AB $\neq$ BA

Example 7

กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

จงแสดงให้เห็นว่า A + B = B + A และ A – B = -B + A

Example 8

กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$

จงแสดงให้เห็นว่า AB $\neq$ BA

Example 9

กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

จงแสดงให้เห็นว่า (AB)C = A(BC)

2.8 เมตริกซ์เอกลักษณ์และนัลเมตริกซ์(Identity and Null Metrix)

- เมตริกซ์เอกลักษณ์ใดๆ หมายถึงสแควร์เมตริกซ์ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากับ 1 จากซ้ายไปขวาและสมาชิกทุกตำแหน่งที่เหลือมีค่าเท่ากับศูนย์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ของเมตริกซ์เอกลักษณ์ได้ดังนี้ I_{n} โดยที่ n คือมิติของเมตริกซ์ (n x n) มีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

หากกำหนดให้ A คือเมตริกซ์ใดๆ และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ใดๆแล้ว

1. AI = IA = A
2. I X I = I^2 = I
3. หาก A = A' แล้ว เรียก A ว่าเป็น symmetric matrix
4. symmetric matrix ใดๆที่ A x A = A เรียก A ว่าเป็น idempotent matrix
5. Identity matrix is symmetric and idempotent.
6. Null matrix เป้เมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ไม่ว่าจะมีมิติใดๆ และไม่จำเป็นต้องเป็นสแควร์เมตริกซ์ หากบวกหรือลบกับเมตริกซ์ใดๆจะได้เท่ากับเมตริกซ์เดิมไม่เปลี่ยนแปลง แต่หากคูณกับ null matrix จะได้เท่ากับ null matrix

Example 10 กำหนดให้

A = $\begin{bmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 9 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$ N = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

แสดงให้เห็นว่า (1) AI = A

(2) BN = N

(3) B + N = B

2.9 เมตริกซ์กับระบบสมการเชิงเส้น (Matrix expression of a system of linear equation)

สมการเชิงเส้นสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์อย่างง่ายได้ดังต่อไปนี้

เช่นสมการ

$$7x_1 + 3x_2 = 45$$
$$4\mathrm{x}_1 + 5\mathrm{x}_2 = 29$$

สามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้ AX = B

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ A คือ coefficient matrix, X *คือ* solution vector*,* และ B คือ vector of constant term และ X กับ B จะเป็น column vector เสมอ

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จากเมตริกซ์ต่อไปนี้ให้หา *(a).* มิติของเมตริกซ์ *(b)* หาทรานสโพส และมิติของทรานสโพส

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \\ 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 9 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 3 \\ 6 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2. ให้หาผลสำเร็จต่อไปนี้

(a) หาผลลัพธ์ของ A + B เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) หาผลลัพธ์ของ A - B เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(c) กำหนดให้

A = $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix}$

D = $\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$ E = $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ F = $\begin{bmatrix} 13 & 3 \end{bmatrix}$

ให้หาผลลัพธ์ต่อไปนี้ AC, BD, EC, DF, CA, DE, DB, CF*และ* EF

3. ร้านฟาสต์ฟู้ดเดอะสตาร์ ในหนึ่งสัปดาห์ขายแฮมเบอร์เกอร์ได้ *1,000* ชิ้น ชีทเบอร์เกอร์ *600* ชิ้น มิลค์เชค *1,200* ขวด ราคาต่อชิ้นของแฮมเบอร์เกอร์ *45 cents* ชีทเบอร์เกอร์ *60 cents* และมิลค์เชค *50 cents* ต้นทุนต่อชิ้นของแฮมเบอร์เกอร์ *38 cents* ชีทเบอร์เกอร์ *42 cents* และมิลค์เชค *32 cents*

(a) ให้หากำไรในหนึ่งสัปดาห์ โดยใช้รูปแบบเมตริกซ์ในการวิเคราะห์

(b) ให้หากำไรต่อหน่วยโดยใช้รูปแบบเมตริกซ์ในการวิเคราะห์