3. Matrix Inversion

3.1 Determinants and Nonsingularity

Determinant $|A|$ อ่านว่า Det of $|A|$ เรียกว่า second-order determinant

หากกำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Determinant คือ $|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Det นั้นจะมีค่าเดียวหรือเป็น Scalar และจะสามารถหาได้ในกรณีที่เป็น square matrix เท่านั้น

หาก Det of matrix มีค่าเท่ากับ 0 หรือหายไป matrix นั้นจะเรียกว่าเป็น singular

หาก Det of matrix $\neq 0$, $|A| \neq 0$, matrix $\mathbf{A}$ นั้นเป็น nonsingular และ low/column เป็น linearly independent หรือสรุปได้ว่า

If $|A| = 0$, the matrix is singular and there is linear dependent among the equations. No unique solution is possible.

If $|A| \neq 0$, the matrix is nonsingular and there is no linear dependent among the equations. No unique solution can be found.

The rank ρ of a matrix คือจำนวนที่มากที่สุดของ linearly independent rows หรือ column ของ matrix สมมติให้ $\mathbf{A}$ เป็น singular matrix มิติ n × n

If $\rho(\mathbf{A}) = n$, $\mathbf{A}$ is nonsingular and there is no linear dependence

If $\rho(\mathbf{A}) < n$, $\mathbf{A}$ is singular and there is linear dependence

Example 1 ให้หา $|A|$ และ $|B|$ โดยที่ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

จากสูตร $|A| = 6(9) - 4(7) = 26$

เพราะ $|A| \neq 0$, the matrix is nonsingular นั่นคือ there is no linear dependence ระหว่าง row กับ columns. The rank of $\mathbf{A}$ is 2, เขียนได้ว่า $p(\mathbf{A}) = 2$

For $|B| = 4(9) - 6(6) = 0$

เพราะ $|B| = 0$, the matrix is singular and linear dependence exists ระหว่าง row กับ columns. นั่นคือ row 2 และ column 2 เท่ากับ 1.5 เท่า ของ row 1 และ column 1 ตามลำดับ ดังนั้น $p(\mathbf{B}) = 1$

3.2 Third-order determinants

กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$

สามารถหา $|\mathrm{A}| = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12}(-1)\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$= a_{11}(a_{22}\ a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}(a_{21}\ a_{33} - a_{23}\,a_{32}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})$

= a scalar

เช่นเดียวกับการหา Det ของ matrix 4×4 , 5×5

Example 2 กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

สามารถหา $|\mathrm{A}| = 8\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 3(-1)\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

= 8(12-7) - 3(18-35) + 2(6-20)

= 8(5) - 3(-17) + 2(-14)

= 63

3.3 Minors and Cofactors

Minor คือ องค์ประกอบส่วนย่อยของเมตริกซ์ หลังจากได้ทำการลดรูปในขั้นตอนของการหา Det จาก 3.2 ในขั้นตอนการหา $|\mathrm{A}|$ พบว่า

$|\mathrm{M}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $|\mathrm{M}_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $|\mathrm{M}_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ดังนั้นเราสามารถเขียนได้ว่า

$|\mathrm{A}| = a_{11}|\mathrm{M}_{11}| + a_{12}|\mathrm{M}_{12}| + a_{13}|\mathrm{M}_{13}|$

Cofactor $|C_{ij}|$ คือ minor ที่มีการกำกับเครื่องหมาย (+,-) กฎของ sign of a cofactor is

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

นั่นคือ ผลรวมของ subscripts เป็นเลขคู่ , $|C_{ij}| = |M_{ij}|$ แต่ถ้าผลรวมของ subscripts เป็นเลขคี่ , $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$

ดังนั้นเราสามารถเขียนได้ว่า สำหรับ Higher order determinants

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| + a_{13}|C_{13}| + a_{14}|C_{14}|$$

3.4 Cofactor and Adjoint matrixes

Cofactor matrix คือ เมตริกซ์ที่ทุกตำแหน่งแทนที่ด้วย Cofactor $|C_{ij}|$

Adjoint matrix คือ transpose of a cofactor matrix , นั่นคือ

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } \mathbf{A} = \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

Example 3 กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

หา Cofactor ก่อน $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 7 \\ -9 & 3 & +9 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix}$

หา Adj $\mathbf{A}$ คือ $\mathbf{C}'$

$$\text{Adj } \mathbf{A} = \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

3.5 Inverse matrixes

Inverse Matrix , $\mathbf{A^{-1}}$, จะหาได้เฉพาะกรณีที่เป็น square matrix, Nonsingular matrix $\mathbf{A}$ และมี unique solution นั่นคือ

$$\mathbf{AA^{-1} = I = A^{-1}A}$$

การคูณเมตริกซ์โดยอินเวอร์ส จะได้ เมตริกซ์เอกลักษณ์ , นั่นคือ สามารถเขียนสูตรได้ว่า

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } \mathbf{A}$$

Example 4 ให้หา Inverse ของ $\mathbf{A}$ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Sol^{n} 1) Check that it is square matrix , here 3×3

2) Evalute the determinant to be sure $|A| \neq 0$

$\because$ only nonsingular matrixes can have inverse.

$|A| = 4(12+1) - 1(-11) - 5(-7)$

$= 52+11+35$

$= 98 \neq 0$

$\therefore$ Matrix $\mathbf{A}$ is nonsingular ; $\rho(\mathbf{A}) = 3$

3) Find the cofactor matrix of $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

Then transpose the cofactor matrix to get the adjoint matrix.

$$\text{Adj } \mathbf{A} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

4) Multiply the adjoint matrix by $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{98}$ to get $\mathbf{A^{-1}}$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{81}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{7}{98} & \frac{7}{98} & \frac{14}{98} \end{bmatrix}$$

5) To check your answer, multiply $\mathbf{AA^{-1}}$ or $\mathbf{A^{-1}A}$

Bost products will equal to **I** if the answer is correct

3.6 Sowing linear equations with the inverse

Inverse matrix สามารถใช้ในการแก้สมการเมตริกซ์ได้ , ถ้า

$$A_{n\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

และถ้า $\mathbf{A^{-1}}$ มีอยู่จริง , คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\mathbf{A^{-1}}$, ด้วยกฎของการถ่ายทอด

$$A^{-1}_{n\times n} \cdot A_{n\cdot n} \cdot X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n} \cdot B_{n\times 1}$$

$$\because A^{-1} \cdot A = I, \textit{thus},$$

$$I_{n\times n} \cdot X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n} \cdot B_{n\times 1}$$

IX = **X** There fore,

$$\boxed{X_{n\times 1} = \left(A^{-1} \cdot B\right)_{n\times 1}}$$

Example 5 จากระบบสมการต่อไปนี้ให้แก้หาค่า X_1 , X_2 และ X_3 ในวิธีการของเมตริกซ์

$$4X_1 + X_2 - 5X_3 = 8$$

$$-2X_1 + 3X_2 + X_3 = 12$$

$$3X_1 - X_2 + 4X_3 = 5$$

ขั้นแรก จัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ **AX** = **B**

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

เอา $\mathbf{A^{-1}}$ คูณทั้งสองข้างได้ $A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

แทน $\mathbf{A^{-1}}$ จาก Ex.4 และแก้สมการหาค่า x

$$x = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ \frac{-1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = x = \begin{bmatrix} \frac{104}{98} & \frac{12}{98} & \frac{80}{98} \\ \frac{88}{98} & \frac{172}{98} & \frac{30}{98} \\ \frac{-8}{14} & \frac{12}{14} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{196}{98} \\ \frac{490}{98} \\ \frac{14}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.7 Cramer's rule for matrix solutions

Cramer's rule เป็นการจัดรูปแบบสมการเชิงเส้นในการหาคำตอบของสมการ

$$\overline{X}_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

เมื่อ X_i เป็นตัวแปรที่ต้องการหาคำตอบ, $|A|$ เป็น determinant of Coefficient matrix and $|A_i|$ is the determinant of a special matrix formed จาก original Coefficient matrix โดยแทนที่ด้วย column of coefficient x_i ด้วย column vector of constants.

Example 6 ให้ใช้ cramer's rule ในการแก้สมการหาค่า **X**

$$6X_1 + 5X_2 = 49$$

$$3X_1 + 4X_2 = 32$$

1. จงแสดงในรูปของ เมตริกซ์ **AX** = **B**

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 32 \end{bmatrix}$$

2. หา det of **A**

$$|A| = 6(4) - 5(3) = 9$$

3. Then to solve for X_1, แทนที่ column 1 (สปส. ของ X_1) ด้วย vector of constant จัด form ใหม่ ของ matrix $\mathbf{A_1}$

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 49 & 5 \\ 32 & 4 \end{bmatrix}$$

หา det of $\mathbf{A_1}$, $|A_1| = 49(4) - 5(32) = 36$

และใช้สูตรสำหรับ Carmer's rule

$$\overline{X}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{36}{9} = 4$$

4. To solve for X_2,

แทนที่ column 2, (สปส. ของ X_2) ด้วย column vector of constant **B** , จะได้ form ใหม่ **A**

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 6 & 49 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}, \ |A_2| = 6(32) - 49(3) = 45 \text{ , ใช้สูตร } \overline{X_2} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$\therefore \ \overline{X_2} = \frac{45}{9} = 5$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1) ให้หา Invese matrix หาก $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

2) ให้ใช้ determinants ในการหาว่ามี unique solution หรือไม่จากสมการต่อไปนี้

a) $12X_1 + 7X_2 = 147$
$15X_1 + 19X_2 = 168$

b) $2X_1 + 3X_2 = 27$
$6X_1 + 9X_2 = 81$

3) จากเงื่อนไขของดุลยภาพของสินค้าทดแทนกัน 2 ชนิด จากสมการให้หาราคาดุลยภาพของสินค้าทั้งสองชนิด

$$5P_1 - 2P_2 = 15$$
$$-P_1 + 8P_2 = 16$$

หา $\overline{P}_1, \overline{P}_2$

4) กำหนดให้ สมการเส้น IS คือ 0.3Y+100i-252=0

สมการเส้น LM คือ 0.25Y-200i-176=0

ให้หาระดับรายได้ดุลยภาพและอัตราดอกเบี้ยดุลยภาพ

5) กำหนดให้ $Y=C+I_0$ และ $C=C_0+bY$

ให้ใช้ matrix invesion ในการหาระดับ Y,C ดุลยภาพ

6) ให้ใช้ Cramer's Rule ในการหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

a) $2X_1 + 6X_2 = 22$
$-X_1 + 5X_2 = 53$

b) $18P_b - P_P = 87$
$-2P_b + 36P_P = 98$