4. อนุพันธ์และกฎของการหาอนุพันธ์

4.1 ลิมิต

ถ้าค่า $f(x)$ ของฟังก์ชัน x เข้าใกล้กับจำนวนจริงที่จำกัด L เพียงค่าเดียวเท่านั้น สำหรับทุกๆค่าของ x เมื่อ x เข้าใกล้กับ a จากทั้งสองข้าง (แต่ไม่เท่ากับ a) ทำให้เรานิยาม กับ L ว่าเป็นลิมิต (Limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ (approach) a และเขียนได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x) = \text{L}$$

เมื่อสมมติให้ $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $\lim_{x\to a} g(x)$ มีอยู่จริง สามารถใช้กฎของลิมิต (Rule of limits) ต่อไปนี้เพื่อกำหนด

1. $\lim_{x\to a} k = k$ (ค่าคงที่ k)
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ (n = จำนวนเต็มบวก)
3. $\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$ (k = ค่าคงที่)
4. $\lim_{x\to a} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm g(x)$
5. $\lim_{x\to a} [f(x)\div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\div \lim_{x\to a} g(x)$, $[\lim_{x\to a} g(x) \neq 0]$
7. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n, n>0$

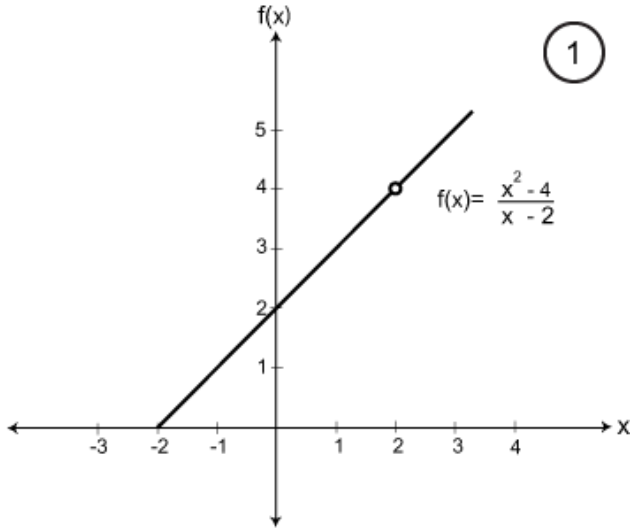
Example 1 จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2}$, $(x\neq 2)$

ไม่สามารถหาค่าได้เมื่อ $x=2$ เมื่อ x เข้าสู่ 2 , $x\to 2$

สรุปว่าลิมิตมีอยู่จริง (exists) เพราะว่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าสู่จำนวนใดๆนั้น จะขึ้นกับค่าของ x ที่เข้าใกล้จำนวนดังกล่าวเท่านั้น

โดยค่าของลิมิตคือ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2}=4$

x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	2
1	3
⋮	⋮
4	6



ในกรณีที่ไม่มีกราฟ เราสามารถหาค่าลิมิตโดยใช้กฎของลิมิต ได้ดังนี้

a) $\lim_{x\to 5}24=24$ (กฎข้อ 1)

b) $\lim_{x\to 7}x^2=$ (กฎข้อ 2)

c) $\lim_{x\to 2}4x^3=$ (กฎข้อ 2 และ 3)

d) $\lim_{x\to 3}\left(x^4+5x\right)=$ (กฎข้อ 4)

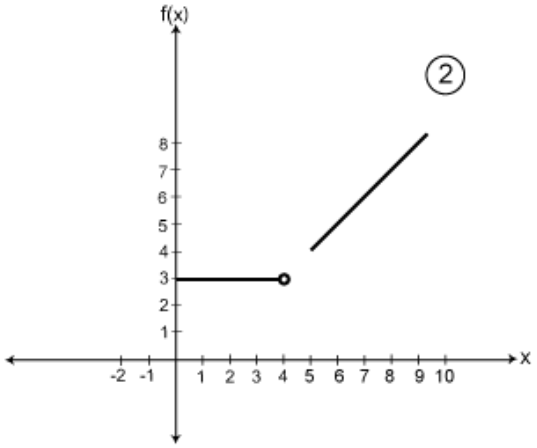
c) $[(x+8)(x-5)]\left(x^4+5x\right)=\lim_{x\to 4}(x+8)\cdot\lim_{x\to 4}(x-5)$ (กฎข้อ 5)

4.2 ความต่อเนื่อง ฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง (continuous) คือ ฟังก์ชันซึ่งเส้นกราฟไม่ขาด โดยฟังก์ชัน f จะต่อเนื่องที่ $x=a$ ถ้า

1. C เป็นนิยาม นั่นคือมีอยู่จริงที่ $x=a$
2. $\lim_{x\to a}f(x)$ มีอยู่จริง
3. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

Example 2 จากรูป

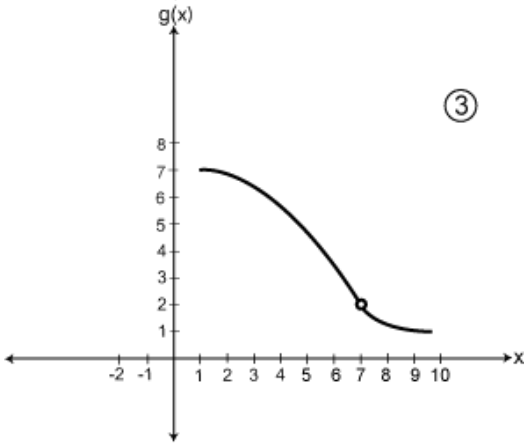
หาก $(a)\quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{เมื่อ } x < 4 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{เมื่อ } x \geq 4 \end{cases}$



จุดที่ไม่ต่อเนื่องคือ $\lim_{x\to 4} f(x)$ ไม่มีอยู่จริง

$(b)\ \lim_{x\to 6} g(x)$

$\lim_{x\to 6} g(x)$ มีอยู่จริง

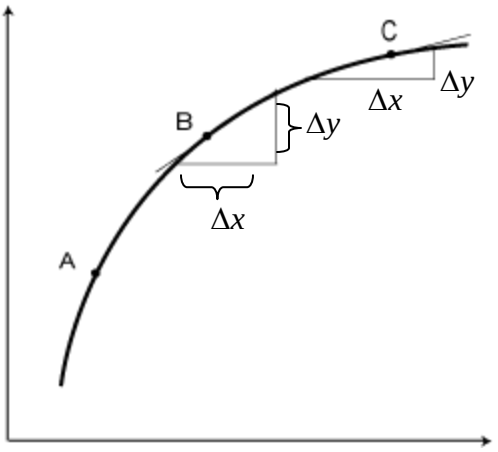


โดยลิมิตและความต่อเนื่องไม่จำเป็นต้องไปด้วยกัน ลิมิตอาจมีอยู่จริงที่จุดใดจุดหนึ่ง โดยฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องที่จุดนั้น (สรุปว่า ลิมิตเป็นเงื่อนไขที่จำเป็น (necessary)) แต่ไม่เพียงพอ (sufficient) สำหรับความต่อเนื่อง

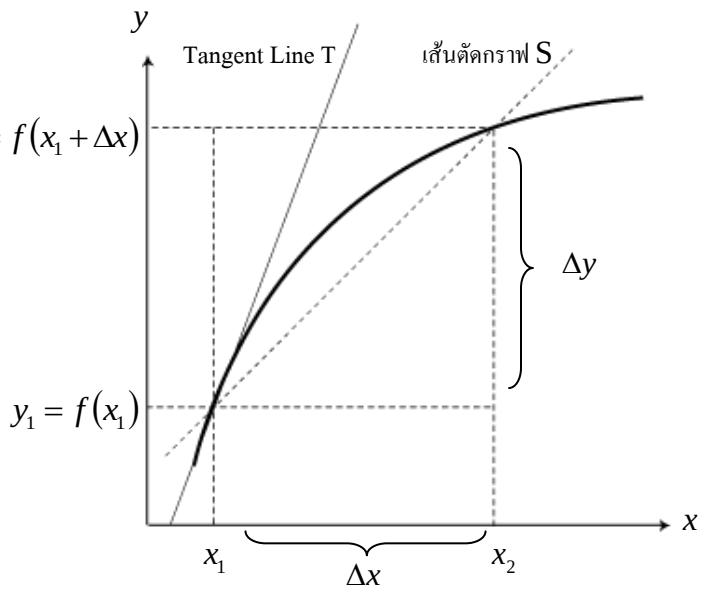
4.3 ความชันของฟังก์ชันเชิงเส้นโค้ง

ความชันของฟังก์ชันเชิงเส้นโค้งไม่ใช่ค่าคงที่ โดยความชัน โดยความชัน ณ จุดต่างๆจะแตกต่างกันออกไปในทางเรขาคณิต เราวัดความชันของเส้นโค้ง ณ จุดหนึ่งได้โดยความชันของเส้นตรงที่ลากมาสัมผัสกับฟังก์ชัน ณ จุดดังกล่าว, เส้นสัมผัส (tangent line) กับฟังก์ชันเชิงเส้นโค้ง คือเส้นตรงซึ่งแตะเส้นโค้งที่สุดเดียวเท่านั้นในพื้นที่รอบๆจุดดังกล่าว

การวัดค่าความชันของฟังก์ชันเชิงเส้นโค้งที่จุดต่างๆกัน จำเป็นต้องใช้เส้นสัมผัสที่ต่างกัน ดังแสดงไว้ในรูปที่ ④ $(a),(b)$



ภาพที่ 4 (a)



(b)

Slope ของเส้น ตัดกราฟ $(s) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

เมื่อให้ $x_2 = x_1 + \Delta x$ และ $y_2 = f(x_1 + \Delta x)$ เราอาจเขียนความชันของเส้นตัดกราฟ ในรูปของสมการผลต่างสืบเนื่องได้ดังนี้

$$s = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1}$$

$$s = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ระยะห่างของ x_2 และ x_1 เล็กลงเรื่อยๆ นั่นคือ $\Delta x \to 0$ เส้นตัดแกนจะหมุนรอบ หลักไปทางด้านซ้ายแล้วค่อยๆเข้าใกล้เส้นสัมผัส T ซึ่งเป็นความชันของฟังก์ชันที่จุดนั้นเช่นกัน

ความชัน T = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

และอาจเขียนได้อีกอย่างว่า

ความชัน T = $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

Example 3 หาความชัน (T) ของฟังก์ชันเชิงเส้นโค้ง $f(x) = 3x^2$

ความชัน T = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ ---------- (1)

1) แทนค่า $f(x) = 3x^2$ ลงใน (1)

ความชัน T = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3(x + \Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x}$

2) ทำผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปที่ง่าย

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\left[\left(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\right)\right] - 3x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x)$$

∴ ความชัน T = $6x$

4.4 อนุพันธ์ (Derivative)

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ มาให้ฟังก์ชันอนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชันที่ x เขียนได้ว่า

$f'(x), y', \frac{df}{dx}$ หรือ dy/dx

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

หรือ $$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

โดยที่ $f'(x)$ อ่านว่า “อนุพันธ์ของ f ในส่วนที่เกี่ยวกับ x ”

4.5 Derivative Notation

อนุพันธ์ฟังก์ชัน สามารถเขียนได้หลายแบบ ได้แก่

$f'(x)$ f' y' $\frac{df}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d}{dx}[f(x)]$ or $D_x[f(x)]$

หรือเมื่อกำหนด $y = \phi(t)$ อนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถเขียนว่า

$\phi'(t)$ ϕ' y' $\frac{dy}{dt}$ $\frac{d\phi}{dt}$ $\frac{d}{dt}[\phi'(t)]$ or $D_t[\phi(t)]$

4.6 Rules of Differentiation

1. กฎฟังก์ชันคงตัว อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัว $f(x) = k$ (โดยที่ k คือค่าคงที่ใดๆเท่ากับศูนย์)

ถ้าให้ $f(x) = k$

$f'(x) = 0$

Example 4 ถ้าให้ $f(x) = 5$, $f'(x) = 0$

ถ้าให้ $f(x) = -9$, $f'(x) = 0$

2. กฎฟังก์ชันเชิงเส้น อนุพันธ์เชิงเส้น $f(x)=mx+b$ จะเท่ากับ m ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x

ถ้าให้ $f(x)=mx+b,\ f'(x)=m$

Example 5 ให้ $f(x)=6x+7$, $f'(x)=6$

ให้ $f(x)=9-\frac{1}{4}x$, $f'(x)=-\frac{1}{4}$

ให้ $f(x)=18x$, $f'(x)=18$

3. กฎฟังก์ชันยกกำลัง ถ้า

$$f(x)=kx^n,\ f'(x)=k\cdot nx^{n-1}$$

Example 6 ให้ $f(x)=6x^3,\ f'(x)=6\cdot 3x^{3-1}=18x^2$

ให้ $f(x)=x^5$, $f'(x)=5x^4$

4. กฎสำหรับผลรวมและต่าง ถ้า

$$f(x)=g(x)\pm h(x)$$
$$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$$

Example 7 ให้ $f(x)=16x^3-5x^2$, $f'(x)=48x^2-10x$

ให้ $f(x)=5x^2+4x-3$, $f'(x)=10x+4$

5. กฎผลคูณ ถ้า $f(x)=g(x)\cdot h(x)$

$$f'(x)=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

Example 8 ถ้า $f(x)=4x^5(3x-2)$

$\because\ g(x)=4x^5 \qquad h(x)=3x-2$

$g'(x)=20x^4 \qquad h'(x)=3$

$\therefore\ f'(x)=(4x^5\cdot 3)+(3x-2)(20x^4)$

$=12x^5+60x^5-40x^4=72x^5-40x^4$

6. กฎผลหาร ถ้า $f(x)=g(x)/h(x)$ โดยที่ $h(x)\neq 0$

$$f'(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Example 9 $f(x)=\frac{6x^3}{2x+5}$, $\left(x\neq -\frac{5}{2}\right)$

⋮ ⋮

7. กฎฟังก์ชันยกกำลังโดยทั่วไป ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ถูกยกกำลัง $f(x)=[g(x)]^n$ แล้ว $f'(x)=n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$

Example 10 หาก $f(x)=(x^2+8)^3$

ให้ $\because g(x)=x^2+8$

$\therefore g'(x)=2x$

$\rightarrow \quad f'(x)=3(x^2+8)^{3-1}\cdot 2x$

$\rightarrow \quad f'(x)=6x(x^2+8)^2$

8. กฎลูกโซ่ หาก $y=f(u)$ และ $u=g(x)$

ดังนั้น $y=f[g(x)]$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Example 11 จากฟังก์ชัน $y=(4x^3+7)^5$ ให้หาค่า $\frac{dy}{dx}$

4.7 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher-order derivatives)

$f(x)\rightarrow f'(x)\rightarrow f''(x)\rightarrow f'''(x)$

เช่นหากกำหนดค่าให้ $f(x)=5x^4+8x^3+7x^2$ จะได้

$f'(x)=20x^3+24x^2+14x$

$f''(x)=60x^2+48x+14$

$f'''(x)=120x+48$

$f^4(x)=120$

$f^5(x)=0$

แบบฝึกหัดที่ 4

1) ให้หาลิมิตต่อไปนี้

ก) $\lim_{x\to 5}\dfrac{7x^2-gx}{x+8}$ ข) $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x^3-7}$

ค) $\lim_{x\to g}\dfrac{x-g}{x^2-81}$ ง) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-gx}{5x^2-34}$

2) ให้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก) $y=-8x^{-3}$ ข) $y=\dfrac{6}{x}=6x^{-1}$

ค) $f(x)=42\sqrt{x}$ ง) $p=6q^4-2q^3$

จ) $f(x)=6x^3(4x-9)$ ฉ) $f(x)=\dfrac{18x^5-gx^4}{3x},\ x\neq 0$

3) จากฟังก์ชันต่อไปนี้ ให้หาอนุพันธ์

ก) $y=(3x^3+8)^5$ ข) $y=\dfrac{1}{9x^3+11x+4}$

ค) $y=\dfrac{1}{\sqrt{7x^2+66}}$ ง) $y=(2x^5+g)^7$ (ใช้ Chain Rule)

จ) $y=5x(3x-4)^2$

4) ให้หาอนุพันธ์อันดับสูง ที่ระดับสองขึ้นไป

ก) $y=10x^3+8x^2+19$ ข) $y=\dfrac{3x}{2x-1}$

ค) $f(x)=(6x-5)^3$

5) กำหนดให้ $f(x)=g(x)+h(x)$ โดยที่ $g(x)$ และ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าสัมบูรณ์ได้ทั้งคู่ ให้พิสูจน์ว่า $f'(x)=g'(x)+h'(x)$

6) หากให้ $f(x)=g(x)/h(x)$ โดยที่ $g'(x), h'(x)$ มีอยู่จริง และ $h(x)\neq 0$ จงพิสูจน์ว่ากฎผลหาร แสดงให้เห็นว่า

$$f(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$