5.แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และการใช้อนุพันธ์

5.1 Convexity and Concavity , Maxima and Minima

ในการวิเคราะห์เพื่อการสรุปผลต่างๆที่ใช้ฟังก์ชันเป็นหุ่นจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่างๆซึ่งจำเป็นในการวิเคราะห์ เช่น ฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์กับอุปทาน ความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนกับกำไร เราอาจใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันช่วยใน

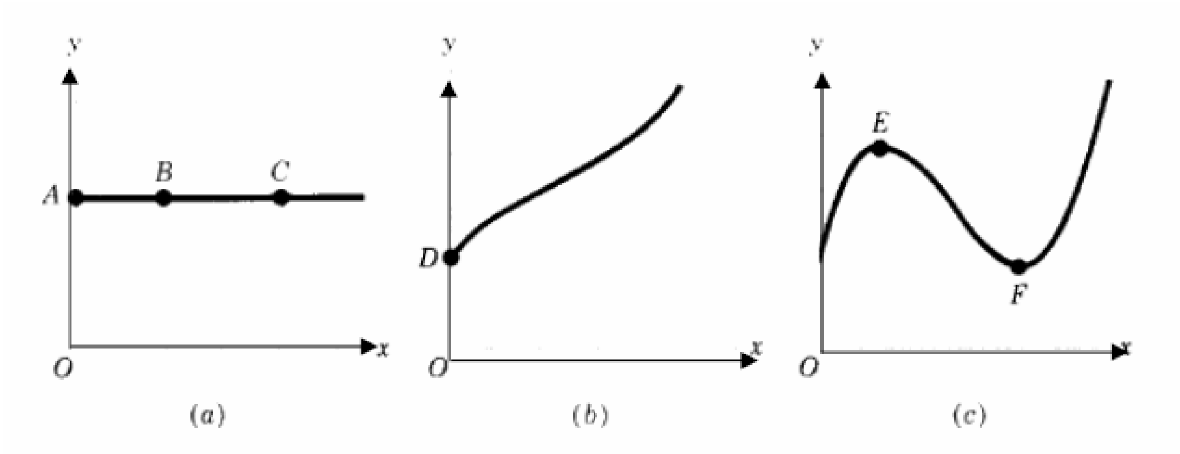
(1) การวิเคราะห์คุณสมบัติของฟังก์ชัน

(2) การหาค่าต่ำสุด/สูงสุด เฉพาะแห่งของฟังก์ชัน (Local max/ Local min) ซึ่งเป็นการประยุกต์ของอนุพันธ์อย่างง่ายๆที่ควรทราบ

(3) การหาค่าความเร็วและอัตราสัมพัทธ์

Local and Global Extremum Concept

พิจารณากราฟ a, b , และ c ข้างล่างนี้



เราพบว่า กรณี กราฟ a เป็นกราฟที่วาดมาจากฟังก์ชันประเภท ค่าคงที่ (Constant Function) ดังนั้น

กรณีกราฟ b เป็นกราฟที่วาดมาจากฟังก์ชันประเภท ฟังก์ชันเพิ่ม สม่ำเสมอ (Strictly Increasing Function)

ดังนั้นกราฟ C เป็นกราฟที่วาดมาจากฟังก์ชันประเภท โพลิโนเมียล

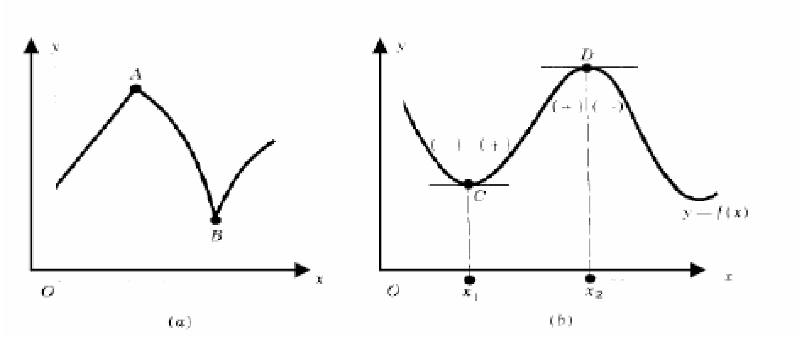
ทบทวนความจำ! *ฟังก์ชันเพิ่มสม่ำเสมอ (Strictly Increasing Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่ $f(x) < f(y)$ สำหรับทุกค่า x และ y เมื่อ $x < y$*

การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับ1 (First Derivative Test)

หากฟังก์ชัน y = f(x) มีค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุด เฉพาะที่ (Local Max/ Local Min) ที่จุด $x = x_0$ อนุพันธ์อันดับที่ 1 จะมีโอกาสเป็นไปได้ 2 กรณี คือ

1.

2.

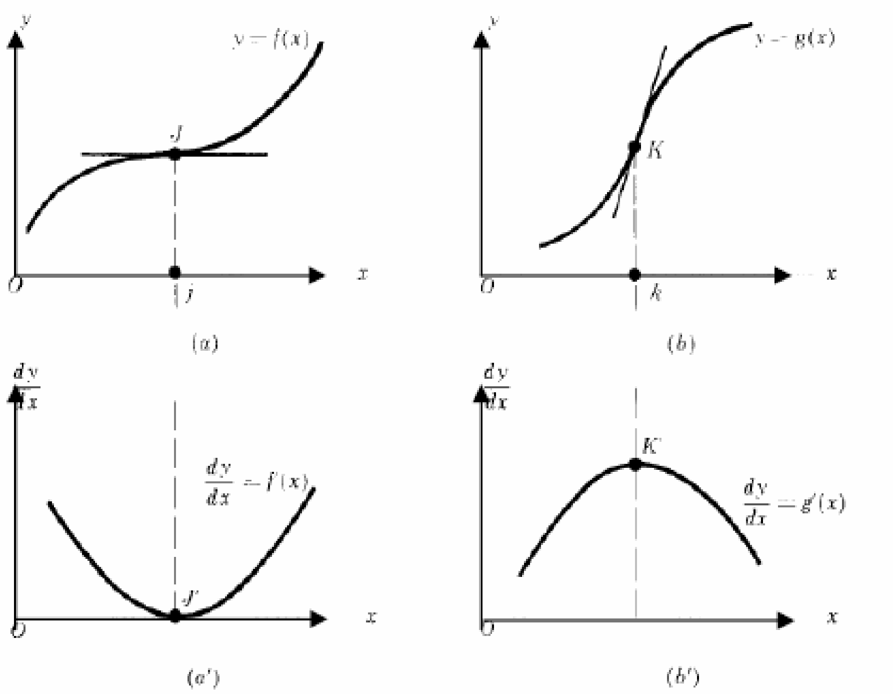


ข้อสรุป ถ้า**ฟังก์ชันมีลักษณะราบเรียบ** (Smooth Function) แล้ว **เงื่อนไขที่จำเป็น** (Necessary Condition) ในการที่จะหาจุดสูงสุด หรือ ต่ำสุดเฉพาะที่ (Local max/ Local min) คือ

เราเรียกค่าของ x ที่ $f'(x) = 0$ ว่า จุดวิกฤติ (Critical point) หรือ จุดนิ่ง (Stationary Point)

อย่างไรก็ตามนักศึกษา! พึงสังเกตว่า เงื่อนไข $f'(x) = 0$ เป็นเพียงเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary Condition) เท่านั้น ไม่ใช่เงื่อนไขที่พอเพียง (Sufficient Condition) ในการที่จะการันตีว่า จุดดังกล่าวที่มีค่า $f'(x) = 0$ จะเป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุด หรือสุดสุดเสมอไป

ตัวอย่างที่จะยกขึ้นมาเช่น กราฟ a ในตัวอย่างข้างล่าง



เราพบว่า กราฟ a แม้ว่า ตำแหน่งที่ x = j จะให้ค่า $f'(x=j)=0$ ซึ่งทำให้ f(j) เป็นค่านิ่งของกราฟ (Stationary Value) แต่ก็ไม่ทำให้ จุด x = j เป็นค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุด เราเรียกกรณีจุด x = j ว่า เป็น **จุดเปลี่ยนเว้า (Inflection Point)**

หมายเหตุ จุดเปลี่ยนเว้า อาจเกิดขึ้นได้อีกกรณี คือ กราฟ b

มาถึงจุดนี้ นักศึกษา อาจเกิดคำถามว่าแล้วเราจะแน่ใจได้อย่างไรว่าจุดวิกฤติของเรา จะเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุด หรือต่ำสุดเฉพาะที่ของกราฟที่กำลังพิจารณา

คำตอบ คือ นอกจากเราจะพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f(x) หรือ อนุพันธ์ อันดับที่ 1 ณ จุดวิกฤตแล้ว เรายังต้องพิจารณา การเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f(x) ด้วย โดยมีหลักเกณฑ์ดังนี้

5.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

5.2.1 การใช้อนุพันธ์อันดับ 1

การทดสอบเพื่อหาค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุดโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

ทฤษฎี ถ้า อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ f(x) ที่จุด $x = x_0$ มีค่าเท่ากับ 0 ($f'(x_0)=0$) แล้ว $f(x_0)$ **จะให้**

1. ค่าสูงสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน หากเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่ 1 เปลี่ยนค่า จาก บวก (+) มาเป็น ลบ (-) เมื่อ หาค่าอนุพันธ์จากทางซ้ายของจุด $x = x_0$ มาทางขวาของจุด $x = x_0$
2. ค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน หากเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่ 1 เปลี่ยนค่า จาก ลบ (+) มาเป็น บวก (-) เมื่อ หาค่าอนุพันธ์จากทางซ้ายของจุด $x = x_0$ มาทางขวาของจุด $x = x_0$
3. ค่าจุดเปลี่ยนเว้า หากเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ไม่เปลี่ยนค่าเลย เมื่อ หาค่าอนุพันธ์จากทางซ้ายของจุด $x = x_0$ มาทางขวาของจุด $x = x_0$

Example 1

จงหาค่าสูงสุด/ต่ำสุด ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$$

จงหาค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของ ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย (Average-Cost Function)

$$AC = f(Q) = Q^2 - 5Q + 8$$

5.2.2 การใช้อนุพันธ์อันดับ 2

การตีความหมายของ อนุพันธ์อันดับที่ 2 (Interpretation of the Second Derivative)

อนุพันธ์อันดับที่ 1 ($f'(x)$) วัด

อนุพันธ์อันดับที่ 2 ($f''(x)$) วัด

โดยถ้า

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array}\right\} \quad \text{ค่าของฟังก์ชัน } f(x) \text{ จะมีค่า} \quad \Big\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \quad \text{ค่าของความชันของฟังก์ชัน } f(x) \text{ จะมีค่า} \quad \Big\}$$

ดังนั้น

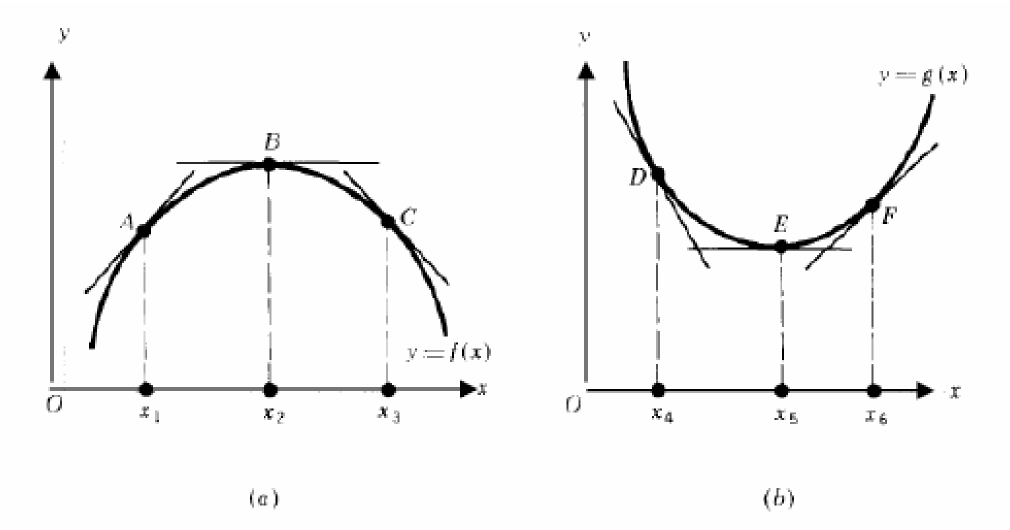
ถ้า $f'(x_0) > 0$ และ $f''(x_0) > 0$ แสดงว่า

ถ้า $f'(x_0) > 0$ และ $f''(x_0) < 0$ แสดงว่า

ถ้า $f'(x_0) < 0$ และ $f''(x_0) > 0$ แสดงว่า

ถ้า $f'(x_0) < 0$ และ $f''(x_0) < 0$ แสดงว่า

พิจารณารูปกราฟต่อไปนี้



กราฟ (a) เราพบว่า

กราฟ (b) เราพบว่า

เราอาจนำประโยชน์ของ อนุพันธ์อันดับที่ 2 มาใช้ในการพิจารณารูปทรงของฟังก์ชัน

โดย

ถ้า $f''(x_0)$ ทุกๆค่าของ x เราจะสรุปได้ว่า ฟังก์ชันนี้เป็น Strictly Concave function

และ

ถ้า $f''(x_0)$ ทุกๆค่าของ x เราจะสรุปได้ว่า ฟังก์ชันนี้เป็น Strictly Convex function

ระวัง!

1.2 การใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ในการหาค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุด เฉพาะที่

ทฤษฎี ถ้า อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ f(x) ที่จุด $x = x_0$ มีค่าเท่ากับ 0 ($f'(x_0) = 0$) แล้ว $f(x_0)$ จะให้

1. ค่าสูงสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน หาก
2. ค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน หาก

สรุป เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary Condition) และเงื่อนไขที่พอเพียง (Sufficient Condition) ของการหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุด

เงื่อนไข	ค่าสูงสุด (Maximum)	ค่าต่ำสุด (Minimum)
First-order necessary		
Second-order necessary		
Second-order sufficient		

Example 2

จงหาค่าสูงสุดเฉพาะแห่งหรือค่าต่ำสุดเฉพาะแห่งของ

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(x^4 - 8x^2\right)$$

จงหาค่าสูงสุดเฉพาะแห่งหรือค่าต่ำสุดเฉพาะแห่งของ

$$g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2$$

5.3 แนวคิดหน่วยสุดท้ายในทางเศรษฐศาสตร์

รายรับหน่วยสุดท้าย(Marginal Revenue) คือการเปลี่ยนแปลงของรายรับรวมเมื่อมีการขายสินค้าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย

ส่วนต้นทุนหน่วยสุดท้าย ((Marginal Cost) คือการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนรวมเมื่อมีการผลิตสินค้าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย

และเนื่องจากรายรับรวม TR และต้นทุนรวม TC ต่างก็เป็นฟังก์ชันของระดับผลผลิต Q เราจึงสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

หาก TR = TR (Q) , MR = dTR / dQ

หาก TC = TR (Q) , MC = dTC / dQ

ในทำนองเดียวกันกับการเขียนหน่วยสุดท้ายของฟังก์ชันอื่นๆทางเศรษฐศาสตร์สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันรวมได้เช่นกัน

Example 3

ถ้า $TC = Q^2 + 5Q + 72$

แล้ว MC =

ถ้า $TR = -3Q^2 + 95Q$

แล้ว MR =

5.4 ความสัมพัทธ์ระหว่างฟังก์ชันรวม หน่วยสุดท้ายและเฉลี่ย

ในทางเศรษฐศาสตร์ ความสัมพันธ์ระหว่างวิกฤตระหว่างฟังก์ชันรวม หน่วยสุดท้าย และเฉลี่ยมีความสำคัญต่อการตีความหมายทางเศรษฐศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง เช่น

Example 4

กำหนดให้ฟังก์ชันต้นทุนรวม $TC = Q^3 - 24Q^2 + 600Q$ ให้หาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต้นทุนรวม เฉลี่ยและหน่วยสุดท้าย

ข้อสังเกต

1. MC ต่ำลงเมื่อ TC เว้าและเพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลง และ MC สูงขึ้นเมื่อ TC นูนและเพิ่มขึ้นในอัตราที่เพิ่มขึ้น โดยMC จะอยู่ที่จุดต่ำสุดเมื่อ TC อยู่ที่จุดเบี่ยงเว้าและมีการเปลี่ยนการเว้า

2. AC ต่ำลงทั่วบริเวณที่ MC < AC อยู่ที่จุดต่ำสุดเมื่อ MC = AC และสูงขึ้นเมื่อ MC > AC

5.5 การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชัน

การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันเป็นกระบวนการในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน โดยสามารถทำได้โดยง่ายตามขั้นตอนดังนี้

1. หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งกำหนดค่าเท่ากับศูนย์ และแก้หาจุดวิกฤต ขั้นตอนนี้เราเรียกว่า เงื่อนไขอันดับที่หนึ่ง (First order condition) และเงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition)
2. หาอนุพันธ์อันดับที่สอง แล้วประเมินค่าที่จุดวิกฤต และตรวจเครื่องหมาย ถ้าเครื่องหมายที่จุดวิกฤต a

$f''(a) > 0$ นูน (convex) , ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f''(a) < 0$ เว้า (concave) , ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$f''(a) = 0$ การทดสอบสรุปผลไม่ได้

ขั้นตอนที่ใช้ทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สองนี้เรียกว่า เงื่อนไขอันดับที่สอง (Second order condition) และเงื่อนเพียงพอ (Sufficient condition) โดยสรุปคือ

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$$f'(a) = 0$$
$$f''(a) < 0$$

และ

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$$f'(a) = 0$$
$$f''(a) > 0$$

แบบฝึกหัด

1. ให้หาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันต่อไปนี้โดย

(a) หาค่าวิกฤตที่ซึ่งฟังก์ชันอยู่ที่ค่าเหมาะสมที่สุด

(b) ทดสอบเงื่อนไขอันดับที่สอง เพื่อแยกระหว่างค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

(1) $y = 9x^2 + 16x - 74$

(2) $y = -5x^2 + 90x - 73$

(3) $y = (7 - 2x)^4$

2. ให้หาฟังก์ชันหน่วยสุดท้าย และฟังก์ชันเฉลี่ยและประเมินค่าทั้งสองที่ Q=2 และ Q=4 ของฟังก์ชัน $TC = Q^2 + 9Q + 16$

3. จงหาฟังก์ชัน MR ซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันอุปสงค์ P = -0.1Q + 25 และประเมินค่า MR ที่ Q = 2 และ Q = 4

4.จงแสดงว่ารายรับหน่วยสุดท้าย (MR) จะต้องเท่ากับต้นทุนหน่วยสุดท้าย (MC) ที่ระดับของผลผลิตที่ให้กำไรสูงสุด

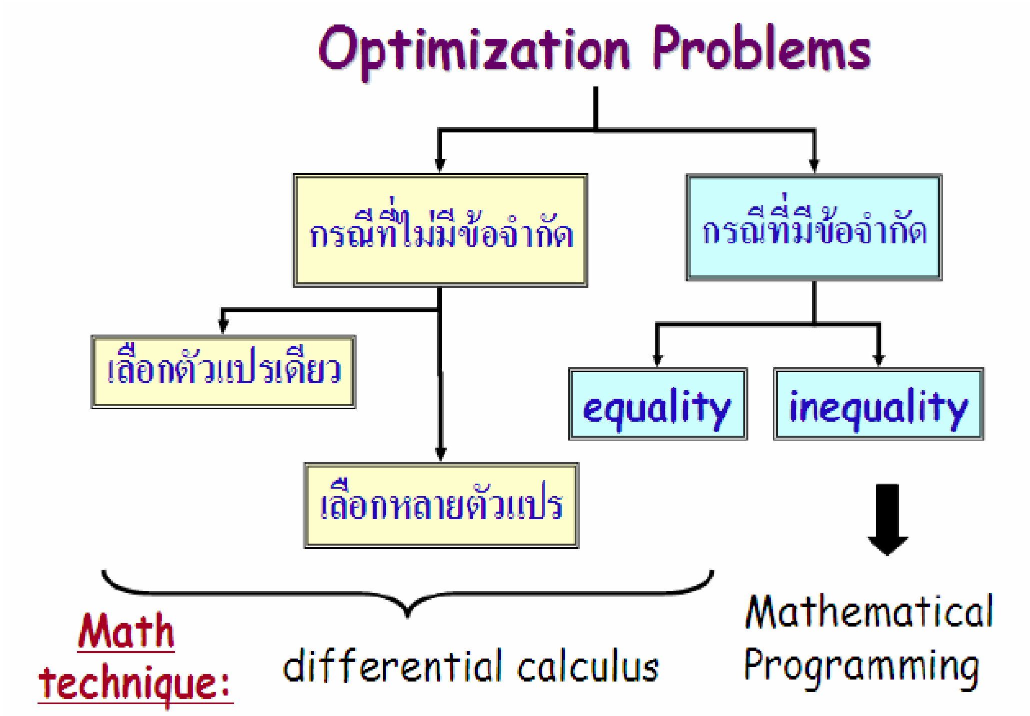
5.จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันรายรับรวม (TR) และกำไรรวม (π) โดย (1) หาค่าวิกฤต (2) ทดสอบโดยใช้เงื่อนไขอันดับที่สอง และ (3) คำนวณหาค่าสูงสุดของ TR และ π

(a). $TR = 96Q - 2Q^2$

(b) $\pi = -2Q^3 - 15Q^2 + 3000Q - 1200$

6. การหาผลเลิศหรือค่าเหมาะสมโดยไม่มีขอบเขต(กรณีตัวแปรอิสระตัวเดียว)

การหาผลเลิศ (Optimization) มีบทบาทสำคัญอย่างมากในทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ ตั้งแต่เราเริ่มรู้จักกับวิชาเศรษฐศาสตร์ นักศึกษาคงพอจะจำความหมายของวิชาเศรษฐศาสตร์ ได้ว่า เป็นวิชาที่ว่าด้วยการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด (a limitation of resources) ให้เกิดประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อเราเรียนเครื่องมือทางคณิตศาสตร์มาถึงตรงนี้ เราก็พร้อมแล้วที่จะนำเครื่องมือที่มีอยู่ มาใช้ในการค้นหาว่า การจัดสรรทรัพยากรในเรื่องต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นเรื่องพฤติกรรมผู้บริโภค พฤติกรรมผู้ผลิต ควรจะเป็นเช่นไรถึงจะเกิดผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (The essence of the optimization problem is to choose the **BEST** alternative available)



Static, Comparative-static Analysis และ Optimization problem

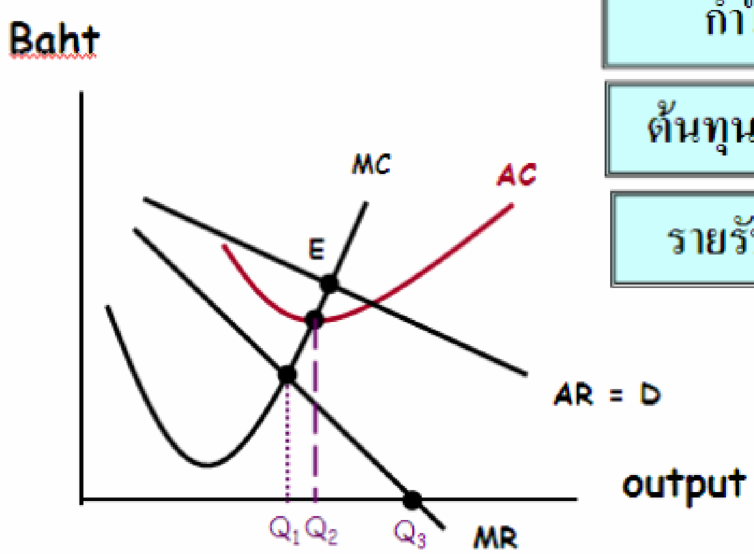
กำหนดให้ $Y = f(X)$

Static: คำตอบของแบบจำลอง: endo V.= f(exo V.)

Comparative Static: ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่า exo V ต่อ endo V หรือ $dY/dX = ?$

Optimization problem: การหาค่า X ที่ทำให้ได้ค่าที่ดีที่สุดของ Y (อาจเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้)

คำตอบที่ได้จะขึ้นอยู่กับเป้าหมายหรือวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้



กำไรสูงสุด: Q_1

ต้นทุนเฉลี่ยต่ำที่สุด: Q_2

รายรับรวมสูงสุด: Q_3

6.1 การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชัน

การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันเป็นกระบวนการในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน โดยสามารถทำได้โดยง่ายตามขั้นตอนดังนี้

3. หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งกำหนดค่าเท่ากับศูนย์ และแก้หาจุดวิกฤต ขั้นตอนนี้เราเรียกว่า เงื่อนไขอันดับที่หนึ่ง (First order condition) และเงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition)
4. หาอนุพันธ์อันดับที่สอง แล้วประเมินค่าที่จุดวิกฤต และตรวจเครื่องหมาย ถ้าเครื่องหมายที่จุดวิกฤต a

$f''(a) > 0$ นูน (convex) , ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f''(a) < 0$ เว้า (concave) , ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$f''(a) = 0$ การทดสอบสรุปผลไม่ได้

ขั้นตอนที่ใช้ทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สองนี้เรียกว่า เงื่อนไขอันดับที่สอง (Second order condition) และเงื่อนเพียงพอ (Sufficient condition) โดยสรุปคือ

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$$f''(a) = 0$$
$$f''(a) < 0$$

และ

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$$f''(a) = 0$$
$$f''(a) > 0$$

Example

ให้หาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันต่อไปนี้โดย

(a) หาค่าวิกฤตที่ซึ่งฟังก์ชันอยู่ที่ค่าเหมาะสมที่สุด

(b) ทดสอบเงื่อนไขอันดับที่สอง เพื่อแยกระหว่างค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

(1) $y = 5x^2 + 15x - 74$

(2) $y = -5x^2 + 90x - 73$

(3) $y = -2(x + 19)^4$

7.การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว

ในการวิเคราะห์ปัญหาในทางเศรษฐศาสตร์ด้วยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์นั้น เป้าหมายอย่างหนึ่งที่เราสนใจ คือต้องการเข้าใจว่าการที่ตัวแปรในทางเศรษฐศาสตร์เปลี่ยนไปนั้น จะส่งผลเช่นไรต่อตัวแปรตัวอื่นๆที่เราสนใจ (Comparative Static) ซึ่งจากบทก่อนหน้านี้เราก็ได้เรียนรู้วิธีการวิเคราะห์ปัญหาเช่นนี้กับแบบจำลองในทางเศรษฐศาสตร์ที่มีตัวแปรเดียว $y = f(x_1)$ โดยใช้เครื่องมือในการวิเคราะห์ คือ One-variable calculus

อย่างไรก็ตามเราพบว่า ในแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ไม่ว่าจะเป็น ฟังก์ชันการผลิต (Production function) ฟังก์ชันต้นทุน (Cost function) ฟังก์ชันกำไร (Profit function) ฟังก์ชันอรรถประโยชน์ (Utility Function) ฟังก์ชันอุปสงค์ (Demand Function) เป็นต้น ฟังก์ชันเหล่านี้ล้วนแล้วแต่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆในทางเศรษฐศาสตร์มากกว่า 1 ตัว $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ ดังนั้นในการวิเคราะห์ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่างๆในแบบจำลอง จึงมีความจำเป็นที่จะต้องมีเครื่องมือในการวิเคราะห์ที่เหมาะสม นั่นคือ Multivariable calculus

7.1 Functions between Euclidian Spaces

<u>Definition</u> A function from a set *A* to *B* is a rule that assigns to each object in *A*, one and only one object in B. In this case, we write $f : A \to B$

ตัวอย่างที่1

$f : R^2 \to R^1$

$f(x, y) = x^2 + y^2$

Domain:

Range:

$f : R^1 \to R^1$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Domain:

Range:

<u>**หมายเหตุ**</u> ถ้าให้ X คือจุด 1 จุด ใน domain ดังนั้น f(X) ก็เป็นแค่ค่า 1 ค่าของ Range เหมือนกัน ดังนั้น หากเราจะเขียน f(X) แทน ฟังก์ชันคงจะไม่เหมาะสม ดังนั้น การจะเขียนสัญลักษณ์แสดงถึง function จึงใช้ เพียงแค่ สัญลักษณ์ f หรือ ใช้ $X \rightarrow f(X)$

ตัวอย่างที่ 2 รูปแบบฟังก์ชันหลายตัวแปรในทางเศรษฐศาสตร์

Function $R^n \rightarrow R$

The constant elasticity demand function $\Rightarrow \quad q_1 = f(p_1, p_2, y) = k_1 p_1^{\alpha} p_2^{\beta} y^{\gamma}$

The firm's production function

$q = a_1 x_1 + a_2 x_2 \Rightarrow Linear$

$q = k x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \Rightarrow Cobb - Douglas$

$$q = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\} \Rightarrow input - output$$

$$q = k\left(c_1 x_1^{-a} + c_2 x_2^{-a}\right)^{-\frac{b}{a}} \Rightarrow Constant\ Elasticity\ of\ Substitution$$

Function $R^k \rightarrow R^m$

The firm's production function that uses three inputs to produce two outputs

$q_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \quad q_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$

$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \left(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)\right) = F(x_1, x_2, x_3)$

ซึ่งในกรณีนี้ $F : R^3 \rightarrow R^2$

7.2 Partial Derivative

กำหนดให้

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

โดยที่ x_i คือ ตัวแปรอิสระของฟังก์ชัน y (i=1,2,...,n) ทั้งนี้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ต่างเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

ถ้าตัวแปรอิสระ x_i เปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ Δx_1 ในขณะที่ตัวแปร x_i ตัวที่เหลือไม่มีการเปลี่ยนแปลง เราจะพบว่า ค่าของ y จะมีการเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ

หากเขียนในรูปอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Δy ต่อการเปลี่ยนแปลงของ Δx_1 จะเขียนได้ว่า

ถ้า เราให้ การเปลี่ยนแปลงของ $\Delta x_1 \to 0$ เราจะได้ว่า

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f_1$$

สัญลักษณ์ $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ อ่านว่า " อนุพันธ์บางส่วนของ y เทียบกับ x_1 (The partial derivative of y with respect to x_1)"

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$ จงหา $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ และ $\frac{\partial y}{\partial x_2}$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ $y = f(u, v) = (u+4)(3u+2v)$ จงหา $\frac{\partial y}{\partial u}$ และ $\frac{\partial y}{\partial v}$

แบบฝึกหัด

1. Compute all the partial derivatives of the following function

a) $4x^2y - 3xy^3 + 6x$

b) xy

c) xy^2

d) e^{2x+3y}

e) $\dfrac{x+y}{x-y}$

f) $3x^2y - 7x\sqrt{y}$

2. Compute the partial derivative of the Cobb-Douglas function $q = k_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ and of the Constant Elasticity of Substitution (CES) production function $q = k\left(c_1 x_1^{-a} + c_2 x_2^{-a}\right)^{-\frac{b}{a}}$ assuming that all the parameters are positive