6.Calculus Multivariable Functions

6.1 Functions of Several Variables and Partial Derivatives

ในการวัดผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร กรณีที่ฟังก์ชันประกอบด้วยตัวแปรหลายตัว สามารถกระทำได้โดยใช้กฎของอนุพันธ์แบบบางส่วน (Rules of Partial Differentiation) ได้แก่

1. Product Rule

Given $z = g(x,y)\cdot h(x,y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x,y)\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + h(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g(x,y)\cdot\frac{\partial h}{\partial y} + h(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$$

2. Quotient Rule

Given $z = g(x,y)/h(x,y)$ and $h(x,y)\neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(x,y)\cdot {}^{\partial g}\!/_{\partial x} - g(x,y)\cdot {}^{\partial h}\!/_{\partial x}}{[h(x,y)]^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h(x,y)\cdot {}^{\partial g}\!/_{\partial y} - g(x,y)\cdot {}^{\partial h}\!/_{\partial y}}{[h(x,y)]^2}$$

3. Generalized Power Function Rule

Given $z = [g(x,y)]^n$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n[g(x,y)]^{n-1}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n[g(x,y)]^{n-1}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$$

6.2 Second-order Partial Derivatives

Given $z = f(x,y)$ we can get

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Example 1 Given $z = (3x+5)(2x+6y)$, by the product rule

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3x+5)(2) + (2x+6y)(3) = 12x + 10 + 18y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3x+5)(6) + (2x+6y)(0) = 18x + 30$$

Example 2 Given $z = (6x+7y)/(5x+3y)$, by the quotient rule

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(5x+3y)(6) - (6x+7y)(5)}{(5x+3y)^2} = \frac{30x+18y-30x-35y}{(5x+3y)^2} = \frac{-17y}{(5x+3y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(5x+3y)(7) - (6x+7y)(3)}{(5x+3y)^2} = \frac{35x+21y-18x-21y}{(5x+3y)^2} = \frac{17x}{(5x+3y)^2}$$

Example 3 กำหนดให้ $z = (x^3 + 7y^2)^4$, ใช้ Generalized Power Function Rule

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3 + 7y^2)^3 \cdot (3x^2) = 12x^2(x^3 + 7y^2)^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x^3 + 7y^2)^3 \cdot (14y) = 56y(x^3 + 7y^2)^3$$

Example 4 จาก $z = 7x^3 + 9xy + 2y^5$ ให้หา (a) first order derivative (b) second-order derivative และ (c) cross partial derivative

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 21x^2 + 9y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 9x + 10y^4$

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = 42x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = 40y^3$

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(21x^2 + 9y\right) = z_{xy} = 9$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(9x + 10y^4\right) = z_{yx} = 9$

6.3 Optimization of Multivariable Functions

จากฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ในการหาค่าเหมาะสมที่สุด สามารถกระทำได้ดังนี้

Relative maximum	Relative minimum
1. $f_x,\ f_y = 0$	1. $f_x,\ f_y = 0$
2. $f_{xx}, f_{yy} < 0$	2. $f_{xx}, f_{yy} > 0$
3. $f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$	3. $f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$

Example 5 กำหนดให้ $z = 2y^3 - x^3 + 147x - 54y + 12$

a) ให้หาจุดวิกฤต b) ทดสอบว่าฟังก์ชันมีค่า maximum และ minimum

วิธีทำ a) take FOC (First order condition)

$z_x = -3x^2 + 147 = 0$, $z_y = 6y^2 - 54 = 0$

$x^2 = 49$ $y^2 = 9$

$x = \pm 7$ $y = \pm 3$

ด้วย $x = \pm 7$, $y = \pm 3$, เรามีจุดวิกฤต (7,3), (7,-3), (-7,3), (-7,-3)

b) Tack SOC และวิเคราะห์จุดวิกฤต , Check the signs ;

$z_{xx} = -6x$, $z_{yy} = 12y$

1) $z_{xx}(7,3) = -6(7) = -42 < 0$ $z_{yy}(7,3) = 12(3) = 36 > 0$

2) $z_{xx}(7,-3) = -6(7) = -42 < 0$ $z_{yy}(7,-3) = 12(-3) = -36 < 0$

3) $z_{xx}(-7,3) = -6(-7) = 42 > 0$ $z_{yy}(-7,3) = 12(3) = 36 > 0$

4) $z_{xx}(-7,-3) = -6(-7) = 42 > 0$ $z_{yy}(-7,-3) = 12(-3) = -36 < 0$

$\because$ (1),(4) มีเครื่องหมายไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนั้น (2),(3) สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนั้น จุดที่เป็น maximum คือ (7,-3) และ minimum คือ (-7.3) ตามลำดับ

ดังนั้นเราสามารถตรวจคำตอบเงื่อนไขสุดท้ายได้ว่า จุดวิกฤตนั้นถูกต้องหรือไม่

นั่นคือ $z_{xx}(a,b) \cdot z_{yy}(a,b) > \left[z_{xy}(a,b)\right]^2$

$z_{xy} = 0$, $z_{yx} = 0$

$z_{xx}(a,b) \cdot z_{yy}(a,b) > \left[z_{xy}(a,b)\right]^2$

From (2) $(-42) \cdot (-36) > 0^2$

1,512 > 0

From (3) $(42) \cdot (36) > 0^2$

1,512 > 0

นั่นคือ ค่าสูงสุดคือ (7,-3) และค่าต่ำสุด (-7.3) ณ จุดวิกฤต

6.4 การหาค่าที่เหมาะที่สุดด้วยตัวทวีคูณลากรานจ์ในกรณีที่กำหนดข้อจำกัด

(Constrained Opimization with Lagrange Multiplier)

กำหนดให้ $f(x, y)$ เป็นเป้าหมายและมีข้อจำกัดที่กำหนดโดย $g(x, y)$เราสามารถหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้โดย กำหนดขอบเขตให้เป็นศูนย์ และตั้งเงื่อนไขคือ

(ให้ k = constant term, λ = Lagrange Multiplier)

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[k - g(x, y)]$$

และให้ $F_x(x, y, \lambda) = 0$, $F_y(x, y, \lambda) = 0$, $F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$

Example 6 Optimize the function $z = 4x^2 + 3xy + 6y2$ subject to constraint $x + y = 56$

1) กำหนดให้ขอบเขตเป็นศูนย์

$$56 - x - y = 0 \qquad \text{----------------------------------(1)}$$

2) ตั้งเงื่อนไขใหม่คือ

$$z = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(56 - x - y) \qquad \text{----------------------------------(2)}$$

3) Take FOC ทั้ง 3 กรณี

$$z_x = 8x + 3y - \lambda = 0 \qquad \text{----------------------------------(3)}$$

$$z_y = 3x + 12y - \lambda = 0 \qquad \text{----------------------------------(4)}$$

$$z_\lambda = 56 - x - y = 0 \qquad \text{----------------------------------(5)}$$

เพื่อกำจัด λ เอา (3)ลบ (4) ได้

$$5x - 9y = 0 \text{ , } x = 1.8y$$

แทน $x = 1.8y$ ใน (5)

$$56 - 1.8y - y = 0 \text{ , } y_0 = 20$$

$\therefore$ เราจะได้ $x = 36$, $\lambda_0 = 348$

แทนคาเหล่านี้ลงใน (2)

$$z = 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2 + (348)(56 - 36 - 20)$$
$$= 4(1296) + 3(720) + 6(400) + (348)(0) \quad = 9{,}744$$

6.5 Total and Partial Differentials

สมมติให้ $z = f(x, y)$ เราสามารถหา Total differential ได้ดังนี้

$$dz = z_x \cdot dx + z_y \cdot dy$$

โดยที่ z_x และ z_y เป็น partial derivative ของ z เทียบกับ x และ y ตามลำดับ ซึ่ง dx และ dy เป็นการเปลี่ยนแปลงส่วนย่อยใน x และ y แต่ Total differential เป็นการเปลี่ยนแปลงโดยรวมนี้เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงย่อยในตัวแปรอิสระ

Example 7 กำหนดให้ $z = x^4 + 8xy + 3y^3$

$$z_x = 4x^3 + 8y \quad , \quad z_y = 8x + 9y^2$$

$\therefore \quad dz = (4x^3 + 8y)dx + (8x + 9y^2)dy$

Example 8 กำหนดให้ $z = f(x,y) = 6x^3 + 7y$

เมื่อ $y = g(x) = 4x^2 + 3x + 8$, $\therefore$ Total differential dz/dx เมื่อเทียบกับ x คือ

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx} \qquad \text{-----------------------------------(1)}$$

เมื่อ $z_x = 18x^2$, $z_y = 7$ และ $\frac{dy}{dx} = 8x + 3$, แทนที่ (1)

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 7(8x+3) = 18x^2 + 56x + 21$$

Check คำตอบโดยลองแทนที่ $y = 4x^2 + 3x + 8$ ลงในสมการตั้งต้นจะได้

$$z = 6x^3 + 7(4x^2 + 3x + 8) = 6x^3 + 28x^2 + 21x + 56$$

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 56x + 21$$

แบบฝึกหัด

1) เมื่อ $z = (w - x - y)(3w + 2x - 4y)$ ให้หา FOC โดยใช้ product rule function

2) เมื่อ $f(x,y) = x^{0.7}y^{0.2}$ ให้หา FOC , SOC

3) ให้หาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของ $f(x,y,z) = 4xyz^2$ ภายใต้ข้อจำกัด $x + y + z = 56$

4) ให้หา total differential $dz = z_x dx + z_y dy$ จากฟังก์ชันต่อไปนี้

a) $z = 7x^2y^3$

b) $z = 7x^2(8x - 7y)$

c) $z = \frac{9y^3}{x - y}$

d) $z = (x - 3y)^3$