8.แคลคูลัสของฟังก์ชั่นหลายตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์

8.1 Marginal Productivity

ผลผลิตหน่วยสุดท้ายของปัจจัยทุน (MP_K) คือการเปลี่ยนแปลงในผลผลิตที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงในปัจจัยทุน โดยที่กำหนดให้สิ่งอื่นๆคงที่ สมมติให้ฟังก์ชันการผลิตคือ

$$Q = 36KL - 2K^2 - 3L^2$$

ในที่นี้ MP_K หาได้จาก การหา partial derivative $\frac{\partial Q}{\partial K}$ ดังนั้น

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 36L - 4K$$

ในทำนองเดียวกัน MP_L หาได้จาก $\frac{\partial Q}{\partial L}$ ดังนั้น

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 36K - 6L$$

Example

1. ให้หา Marginal productivity ของปัจจัยการผลิตต่างๆ จากฟังก์ชันการผลิตต่อไปนี้

a) $Q = 0.5K^2 - 2KL + L^2$

$MP_K = k - 2L$

$MP_L = 2L - 2K$

b) $Q = 20 + 8x + 3x^2 - 0.25x^3 + 5y + 2y^2 - 0.5y^3$

$MP_x = 8 + 6x - 0.75X^2$

$MP_y = 5 + 4y - 1.5y^2$

2. ให้หา Marginal Cost ของหน่วยผลิตของปัจจัยทางการผลิตต่างๆจากฟังก์ชั่นต้นทุนการผลิตต่อไปนี้ และ หา Marginal Cost ที่กำหนดเมื่อ x=5 , y=3

$$C = 3x^2 + 7x + 1.5xy + 6y + 2y^2$$

- $MC_x = 6x + 7 + 1.5y$

  $MC_y = 1.5x + 6 + 4y$

- Marginal Cost of x เมื่อ x =5 and y=3 คือ

  $MC_x = 6(5) + 7 + 1.5(3) = 41.5$

8.2 การกำหนดตัวทวีคูณด้านรายได้ และการเปรียบเทียบเชิงสถิติ

Income Determination Multipliers and Comparative Statistics

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

where $C = C_0 + bY$ $\quad G = G_0$ $\quad M = M_0 + mY$

$I = I_0 + iY$ $\quad X = X_0$

นั่นคือ ระดับรายดุลยภาพ คือ

$$\hat{Y} = \frac{1}{(1-b-i+m)}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)$$

ดังนั้น ตัวทวีคูณด้านการใช้จ่ายภาครัฐ คือ

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{(1-b-i+m)}$$

ตัวทวีคูณด้านการนำเข้า คือ

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial M_0} = \frac{1}{(1-b-i+m)}$$

ตัวทวีคูณด้านการลงทุน คือ

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{(1-b-i+m)}$$

8.3 ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ และค่าความยืดหยุ่นไขว้ของอุปสงค์

- Income elasticity of demand : E_y เป็นการวัดการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ของสินค้าที่เกิดจากการที่รายได้เปลี่ยนแปลง เมื่อกำหนดให้ปัจจัยอื่นคงที่

- Cross price elasticity of demand : E_c เป็นการวัดความสัมพันธ์ของอุปสงค์ของสินค้าหนึ่งที่เปลี่ยนแปลงไปจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ของสินค้าอีกชนิดหนึ่ง

หากกำหนดให้ Demand function คือ

$$Q_1 = a - bP_1 + cP_2 + mY$$

เมื่อ $Y =$ รายได้ , และ $P_2 =$ ราคาสินค้าทดแทน , $P_1 =$ ราคาสินค้า

ดังนั้น ค่าความยืดหยุ่นอุปสงค์ต่อรายได้ คือ

$$E_y = \left(\frac{\partial Q_1}{Q_1}\right) \Big/ \left(\frac{\partial P_2}{P_2}\right) = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2}\left(\frac{P_2}{Q_1}\right)$$

Example กำหนดให้ $Q_1 = 50 - 4P_1 + 3P_2 + 2P_3 + 0.001Y$ ณ $P_1 = 5$, $P_2 = 7$, $P_3 = 3, Y = 11{,}000$ และ $Q_1 = 26$

(a) ให้ใช้ความยืดหยุ่นไขว้ในการกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างสินค้าชนิดที่หนึ่ง และสินค้าที่เหลืออีกสองชนิด

$$\mathrm{E}_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2}\left(\frac{P_2}{Q_1}\right) = -3\left(\frac{7}{26}\right) = -0.81$$

$$\mathrm{E}_{13} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_3}\left(\frac{P_3}{Q_1}\right) = 2\left(\frac{3}{26}\right) = 0.23$$

- E_{12} มีเครื่องหมายติดลบ แสดงว่าสินค้าชนิดหนึ่งและสองเป็นสินค้าใช้ประกอบกัน นั่นคือ เมื่อ P_2 ราคาสูงขึ้นทำให้ปริมาณการบริโภค Q_1 ลดลง
- E_{13} มีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงว่าสินค้าชนิดหนึ่งและสองเป็นสินค้าใช้ทดแทนกัน นั่นคือ เมื่อ P_3 ราคาสูงขึ้นทำให้ปริมาณการบริโภค Q_1 เพิ่มขึ้น

(b) กำหนดให้มีการเพิ่มขึ้นของราคาสินค้า 2 และ 3 ให้หาผลการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นต่อ Q_1

$$\because \quad \mathrm{E}_{12} = \left(\frac{\partial Q_1}{Q_1}\right) \Big/ \left(\frac{\partial P_2}{P_2}\right)$$

Rearranging terms and substituting the known parameters,

$$\frac{\partial Q_1}{Q_1} = \mathrm{E}_{12}\left(\frac{\partial P_2}{P_2}\right) = -0.81(0.10) = -0.081$$

ถ้า P_2 เพิ่มขึ้น 10%, Q_1 ลดลง 8.1%

$$\mathrm{E}_{13} = \left(\frac{\partial Q_1}{Q_1}\right) \Big/ \left(\frac{\partial P_3}{P_3}\right)$$

$$\frac{\partial Q_1}{Q_1} = \mathrm{E}_{13}\left(\frac{\partial P_3}{P_3}\right) = 0.23(0.10) = 0.023$$

ถ้า P_3 เพิ่มขึ้น 10%, Q_1 เพิ่มขึ้น 2.3%

8.4 Optimization of Multivariable Functions in Economics

บ่อยครั้งในกระบวนการผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปมีหลากหลายคุณภาพตั้งแต่ราคาสูงถึงราคาถูก เป้าหมายของกำไรสูงสุด หรือ ต้นทุนน้อยที่สุด ภายใต้เงื่อนไข

Example โรงงานผลิตสินค้าสองชนิดคือ สินค้า x และสินค้า y โดยมี profit function.

$$\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

ให้หาปริมาณ การผลิต ณ ระดับที่ได้กำไรสูงสุดของสินค้า x และ y

วิธีทำ 1. หา First order Derivatives ของ x และ y และกำหนดให้เป็นศูนย์

$$\pi_x = 64 - 4x + 4y = 0$$

$$\pi_y = 4x - 8y + 32$$

เมื่อแก้สมการจะได้ $\tilde{x} = 40$, $\tilde{y} = 24$

2. หา Second Order Direct Partial Derivatives and make sure both are negative และจะเป็นค่าที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด

$$\pi_{xx} = -4 \qquad \pi_{yy} = -8$$

3. หา Cross partials และทดสอบว่า $\pi_{xx}\,\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$

พบว่า $\pi_{xy} = 4 = \pi_{yx}$ ดังนั้น

$$\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$$

$$(-4)(-8) > (4)^2$$

$$32 > 16$$

$\therefore$ สามารถบอกได้ว่า ระดับการผลิตสินค้า x ที่ 40 หน่วย, สินค้า y ที่ 24 หน่วย ทำให้ได้กำไรสูงสุด

8.5 Constrained Optimization of Multivariable Functions in Economics

การหาคำตอบในปัญหาทางเศรษฐศาสตร์บ่อยครั้งที่จะต้องพบกับปัญหาที่อยู่ภายใต้ข้อจำกัดต่างๆ เช่น การจัดสรรงบประมาณอย่างไรให้เกิดความพอใจสูงสุด หรือ ผลิตอย่างไรให้เกิดต้นทุนต่ำที่สุด โดยใช้ Lagragian Function

Example ให้หาจุดวิกฤตสำหรับการหาต้นทุนการผลิตที่ต่ำสุดของการผลิตของหน่วยผลิตในการผลิตสินค้า x และ y เมื่อกำหนด Cost Function คือ $C = 8x^2 - xy + 12y^2$ โดยที่หน่วยผลิตมีข้อกำหนดว่าต้องผลิตสินค้าสองชนิดรวมกันให้ได้ 42 นั่นคือ $x + y = 42$

วิธีทำ 1. $42 - x - y = 0$

2. Set up $C = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda(42 - x - y)$

3. Take FOC ทีละส่วน

$$C_x = \frac{\partial C}{\partial x} \Rightarrow 16x - y - \lambda = 0$$

$$C_y = \frac{\partial C}{\partial y} \Rightarrow 24y - x - \lambda = 0$$

$$C_\lambda = \frac{\partial C}{\partial \lambda} \Rightarrow 42 - x - y = 0$$

แก้สมการหาค่า $x = 25$, $y = 17$, $\lambda = 383$

ที่ $\lambda = 383$ หมายความว่า การผลิตที่เพิ่มขึ้นในขอบเขต (Production quota) นำไปสู่การเพิ่มขึ้นของต้นทุนประมาณ \$383

8.6 Homogeneous Production Function

A production จะเป็น homogeneous ถ้าปัจจัยการผลิตคูณด้วยค่าคงที่ค่าบวก (k), ค่าคงที่สามารถบ่งบอกถึงระดับของปัจจัยการผลิตได้ คือ

ถ้ากำลังของปัจจัยเป็น 1 the function is homogeneous of degree 1

ถ้ากำลังของปัจจัยมากกว่า 1 หมายความว่า the function is homogeneous greater than 1

ถ้ากำลังของปัจจัยน้อยกว่า 1 หมายความว่า the function is homogeneous less than 1

ฟังก์ชัน $Z = f(x, y)$ is homogeneous of degree n , if for all positive of k

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$$

Example the degree of homogeneity of a function is illustrated below,

1. $Z = 8x + 9y$ is homogenous of degree 1 because

$$f(kx, ky) = 8kx + 9ky = k(8x + 9y)$$

2. $Z = x^2 + xy + y^2$ is homogenous of degree 2 because

$$f(kx, ky) = (kx)^2 + (kxy) + (ky)^2$$
$$= k^2(x^2 + xy + y^2)$$

3. $Z = \dfrac{2x}{y}$ is homogenous of degree 0 because

$$f(kx, ky) = \frac{2kx}{ky} = 1\left(\frac{2x}{y}\right) \text{ since } \frac{k}{k} = k^0 = 1$$

8.7 Returns to Scale

ฟังก์ชันการผลิตจะบ่งบอกว่าเป็น constant returns to scale เมื่อ เพิ่มปัจจัยการผลิตในสัดส่วน k , ผลผลิตจะเพิ่มขึ้นในอัตราส่วนเดียวกัน

หากเป็น increasing returns to scale คือเมื่อเพิ่มปัจจัยการผลิตในสัดส่วน k ผลผลิตจะเพิ่มขึ้นมากกว่า k และ

หากเป็น diminishing return to scale คือเมื่อเพิ่มปัจจัยการผลิตในสัดส่วน k ผลผลิตจะเพิ่มขึ้นน้อยกว่า k หรือ

ฟังก์ชันการผลิตมี homogeneous > , < , = 1 , returns to scale จะเป็น increasing , constant or diminishing

Example จากฟังก์ชันการผลิตต่อไปนี้ให้ระบุ level of homogeneity และ returns to scale

a) $Q = \dfrac{3x^2}{5y^2}$

เพราะ $f(kx,ky) = \dfrac{3(kx)^2}{5(ky)^2} = \left(\dfrac{k}{k}\right)^2 \dfrac{3x^2}{5y^2} = 1\left(\dfrac{3x^2}{5y^2}\right)$ since $\left(\dfrac{k}{k}\right)^2 = k^0 = 1$

นั่นคือ homogeneous of degree 0, and return to scale are decreasing

b) $Q = x^2 + 6xy + 7y$

เพราะ $f(kx,ky) = (kx)^2 + 6(kx)(ky) + 7(ky)^2 = k^2(x^2 + 6xy + 7y^2)$

นั่นคือ Q มี homogeneous of degree 2, and return to scale are increasing

8.8 Optimization of Cobb-Douglas Production Function

การวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ในการวิเคราะห์ฟังก์ชันการผลิต เช่น Cobb-Douglas Production f^n

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (A > 0; 0 < \alpha, \beta < 1)$$

เมื่อ q คือ ผลผลิต , k คือ Capital , L คือ Labor

ในที่นี้ α (the output elasticity of capital) วัด % การเปลี่ยนแปลงของผลผลิตเมื่อ K เปลี่ยนแปลงไป 1 %

เมื่อให้ L คงที่ ; β (the output elasticity of labor) วัด % การเปลี่ยนแปลงของผลผลิตเมื่อ L เปลี่ยนแปลงไป 1% และให้ K คงที่

และ A แสดงถึง efficiency parameter สะท้อนถึงระดับเทคโนโลยีการผลิต

ใน Cobb-Douglas function หาก $\alpha + \beta = 1$ >> Constant returns to scale

หาก $\alpha + \beta > 1$ >> Increasing returns to scale

หาก $\alpha + \beta < 1$ >> Decreasing returns to scale

Example สมมติให้ Budget constraint คือ \$108 เมื่อ $P_K = 3\$$ และ $P_L = 4\$$ จากฟังก์ชันการผลิต $q = K^{0.4}L^{0.5}$ ให้หาสัดส่วนที่เหมาะสมในการผลิต

วิธีทำ Set up Lagragian function

$$Q = K^{0.4}L^{0.5} + \lambda(108 - 3K - 4L)$$

1) $\dfrac{\partial Q}{\partial K} = Q_k = 0.4K^{-0.6}L^{0.5} - 3\lambda = 0$ ------------------------(1)

2) $\dfrac{\partial Q}{\partial L} = Q_L = 0.5K^{0.4}L^{-0.5} - 4\lambda = 0$ ------------------------(2)

3) $\dfrac{\partial Q}{\partial \lambda} = Q_\lambda = 108 - 3K - 4L = 0$ ------------------------(3)

Rearrange , แล้วหาร (1) ด้วย (2) เพื่อกำจัด λ

$$\frac{0.4K^{-0.6}L^{0.5}}{0.5K^{0.4}L^{-0.5}} = \frac{3\lambda}{4\lambda}$$

$$0.8K^{-1}L^{-1} = 0.75$$

$$\frac{L}{K} = \frac{0.75}{0.8} \Rightarrow L = 0.9375K$$

แทน $L = 0.9375K$ ใน (3) $108 - 3K - 4(0.9375K) = 0$ ได้ $K = 16$

แทน $K = 16$ ใน (3) จะได้ $L = 15$